Контрольная работа № 3

(1) $y=\frac{4x}{4+x^2}$;

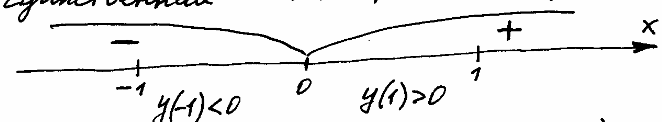
1) ООФ: $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) Точек разрыва нет. Функция непрерывна при $x\in(-\infty;+\infty)$.

3) $y(-x)=\frac{4\cdot(-x)}{(-x)^2+4}=-\frac{4x}{x^2+4}=-y(x)$.

Функция нечётная, её график симметричен относительно начала координат. Функция непериодическая.

4) Единственная точка пересечения графика с осями координат $O(0;0)$.



$y>0$ при $x\in(0;+\infty)$, $y<0$ при $x\in(-\infty;0)$.

5) Вертикальных асимптот график не имеет.

Ищем асимптоты при $x\to\pm\infty$.

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x(4+x^2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2+4}=0.$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}(y-k_1\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)}{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

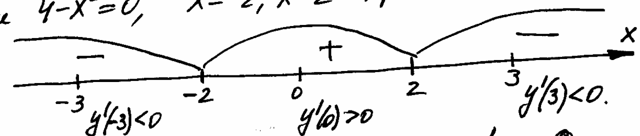
$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x(4+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{4+x^2}=0.$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}(y-k_2\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)}{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

Прямая $y=0$ (ось Ox) является асимптотой графика при $x\to\pm\infty$.

6) $y'=4\cdot\frac{1\cdot(4+x^2)-2x\cdot x}{(4+x^2)^2}=\frac{4\cdot(4-x^2)}{(4+x^2)^2}$;

$y'=0$, если $4-x^2=0$, $x=-2$, $x=2$ — критические точки.



Функция возрастает в интервале $(-2;2)$, где $y'>0$. Функция убывает в интервалах $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$, где $y'<0$. При переходе через точку $x=-2$ y' меняет знак с − на +, это точка минимума; при переходе через точку $x=2$ y' меняет знак с + на −, это точка максимума.

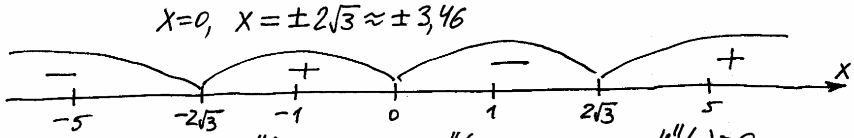
x	$-\infty;\ -2$	-2	$-2;\ 2$	2	$2;\ +\infty$
y'	−	0	+	0	−
y	↘	−1	↗	1	↘
		min		max	

7) $y'' = 4\cdot\frac{-2x(4+x^2)^2-2\cdot(4+x^2)\cdot 2x\cdot(4-x^2)}{(4+x^2)^4} = 4\cdot\frac{-2x\cdot(4+x^2)-4x\cdot(4-x^2)}{(4+x^2)^3} =$

$= \frac{-8x(4+x^2+8-2x^2)}{(4+x^2)^3} = -\frac{8x\cdot(12-x^2)}{(4+x^2)^3};$

$y''=0$, если $8x\cdot(12-x^2)=0$

$x=0,\ x=\pm 2\sqrt{3}\approx \pm 3{,}46$



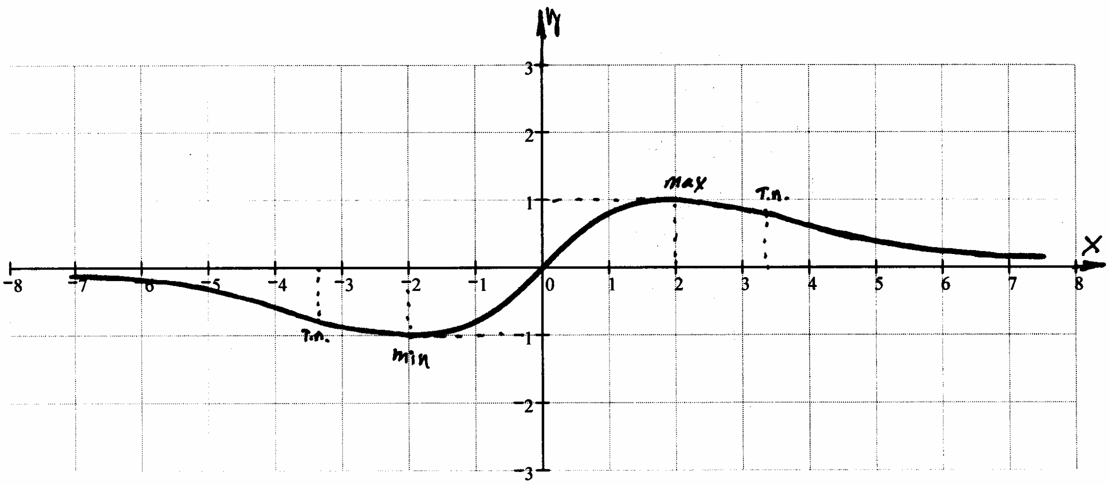
$y''(-5)<0$ $y''(-1)>0$ $y''(1)<0$ $y''(5)>0$

График обращён выпуклостью вверх в интервалах $(-\infty;-2\sqrt{3})$, $(0;2\sqrt{3})$, где $y''<0$.

График обращён выпуклостью вниз в интервалах $(-2\sqrt{3};0)$, $(2\sqrt{3};+\infty)$, где $y''>0$.

При переходе через точки $x=0$, $x=-2\sqrt{3}$, $x=2\sqrt{3}$ y'' меняет знак, это точки перегиба, $y(0)=0$, $y(2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$, $y(-2\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}87$

x	$-\infty; -2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}; 0$	0	$0; 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}; +\infty$
y''	—	0	+	0	—	0	+
y	∩	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	∪		∩	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	∪
		т.п.		т.п.		т.п.	



(2) $z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$; $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$;

Находим частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{0-5(x^2-y^2)^4\cdot 2xy}{(x^2-y^2)^{10}}=-\frac{10xy}{(x^2-y^2)^6};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x^2-y^2)^5-5(x^2-y^2)^4\cdot(-2y)\cdot y}{(x^2-y^2)^{10}}=\frac{x^2-y^2+10y^2}{(x^2-y^2)^6}=\frac{x^2+9y^2}{(x^2-y^2)^6};$$

Подставим найденные значения в заданное уравнение.

$$\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{10xy}{(x^2-y^2)^6}\right)+\frac{1}{y}\cdot\frac{x^2+9y^2}{(x^2-y^2)^6}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$$

$$-\frac{10y}{(x^2-y^2)^6}+\frac{x^2}{y(x^2-y^2)^6}+\frac{9y}{(x^2-y^2)^6}=\frac{1}{y(x^2-y^2)^5}$$

$$\frac{x^2}{y(x^2-y^2)^6}-\frac{y}{(x^2-y^2)^6}=\frac{1}{y(x^2-y^2)^5};\quad \frac{x^2-y^2}{y(x^2-y^2)^6}=\frac{1}{y(x^2-y^2)^5};\quad \frac{1}{y(x^2-y^2)^5}=\frac{1}{y(x^2-y^2)^5},$$

Получено тождество, значит заданная функция удовлетворяет заданному уравнению.

(3) $z=\ln\left(x+y+xy+\frac{1}{xy}\right)$ $dz-?$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.\quad (*).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\left(x+y+xy+\frac{1}{xy}\right)}\cdot\left(1+y+\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{xy}{x^2y+xy^2+x^2y^2+1}\cdot\frac{x^2y+x^2y^2-1}{x^2y}=$$

$$=\frac{x^2y+x^2y^2-1}{x\cdot(x^2y+xy^2+x^2y^2+1)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+xy+\frac{1}{xy}}\cdot\left(1+x-\frac{1}{xy^2}\right)=\frac{xy}{x^2y+xy^2+x^2y^2+1}\cdot\frac{xy^2+x^2y^2-1}{xy^2}=$$

$$=\frac{x^2y^2+xy^2-1}{y(x^2y+xy^2+x^2y^2+1)}$$

Подставив значение в $(*)$, получим:

$$dz=\frac{(x^2y+x^2y^2-1)\,dx}{x(x^2y+xy^2+x^2y^2+1)}+\frac{(x^2y^2+xy^2-1)\,dy}{y(x^2y+xy^2+x^2y^2+1)};$$

(4) $z = (x^2+y)\cdot e^{y/2}$

$z'_x = 2x\cdot e^{y/2};\quad z'_y = e^{y/2} + (x^2+y)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{y/2} = \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y+1\right)\cdot e^{y/2};$

пользуясь необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки: $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x\cdot e^{y/2}=0 \\ \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y+1\right)e^{y/2}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

Стационарная точка $M(0;-2)$.

Исследуем стационарную точку M по знаку определителя, составленного из значений частных производных второго порядка в точке M.

$z''_{xx} = 2e^{y/2};\quad z''_{xy} = 2x\cdot\frac{1}{2}e^{y/2} = x\cdot e^{y/2};\quad z''_{yy} = \frac{1}{2}e^{y/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y+1\right)e^{y/2} = \left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y+1\right)\cdot e^{y/2}.$

В точке $M(0;-2)$ находим:

$A = z''_{xx}(M) = 2e^{-1} = \frac{2}{e};\quad B = z''_{xy}(M) = 0\cdot e^{-1} = 0;\quad C = z''_{yy}(M) = \left(0-\frac{1}{2}+1\right)\cdot e^{-1} = \frac{1}{2e};$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2e} \end{vmatrix} = \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{e^2} > 0.$$

$\Delta > 0$, значит точка $M(0;-2)$ – точка экстремума

Т.к. $A > 0$, то это точка минимума

$z_{min} = z(M) = (0-2)\cdot e^{-\frac{2}{2}} = -\frac{2}{e};$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

1

1) $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x dx = \int e^{t}$

Положим $t=\sin x$, тогда $dt=\cos x dx$. Интеграл примет вид:

$$\int e^{t^2}\cdot 2t dt = \int e^{t^2} d(t^2) = e^{t^2}+C.$$

Выполнив обратную подстановку, получим:

$$\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x dx = e^{\sin^2 x}+C.$$

Проверка: $d(e^{\sin^2 x}+C)=(e^{\sin^2 x}+C)' dx = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x dx = e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x dx.$

решено верно.

2) $\int x\cdot\ln^2 x dx.$

Интегрируем по частям: $\int u dv = uv - \int v du.$

$u=\ln^2 x,\quad du = 2\ln x\cdot\frac{dx}{x},\quad dv = x dx,\quad v=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x\cdot\ln^2 x dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \int\frac{1}{2}x^2\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \int x\cdot\ln x dx.$$

Повторно интегрируем по частям: $u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x},\ dv=x dx,\ v=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x\cdot\ln^2 x dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Проверка: $d\left(\frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C\right) = \left(\frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C\right)' dx =$

$= \left(x\cdot\ln^2 x + \frac{1}{2}x^2\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} - x\cdot\ln x - \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x\right)dx = \left(x\cdot\ln^2 x + x\cdot\ln x - x\cdot\ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\right)dx =$

$= x\cdot\ln^2 x dx.$ Решено верно.

3) $\int\frac{(x-1)dx}{4x^2-1} = \int\frac{(x-1)dx}{(2x-1)(2x+1)}$

Разложим подынтегральное выражение на простые дроби.

$$\frac{x-1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1} = \frac{2Bx+2Ax-B+A}{4x^2-1} = \frac{(2A+2B)x+(A-B)}{4x^2-1};$$

$$\begin{cases}2A+2B=1\\ A-B=-1\end{cases}\quad\begin{cases}2A+2B=1\\ A=B-1\end{cases}\quad\begin{cases}2B-2+2B=1\\ A=B-1\end{cases}\quad\begin{cases}B=\frac{3}{4}\\ A=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\frac{x-1}{4x^2-1} = -\frac{1}{4(2x-1)}+\frac{3}{4(2x+1)};$$

$$\int\frac{(x-1)dx}{4x^2-1} = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{2x+1} = -\frac{1}{8}\ln|2x-1|+\frac{3}{8}\cdot\ln|2x+1|+C;$$

2

а) $(x^2-y^2)\cdot y'=2xy$

$y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; Это однородное уравнение. Положим $y=u\cdot x$, тогда $y'=u+x\cdot u'$. Уравнение принимает вид:

$$u+x\cdot u'=\frac{2x\cdot u\cdot x}{x^2-u^2\cdot x^2}$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}-u;$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}; \qquad x\frac{du}{dx}=\frac{u^3+u}{1-u^2}; \qquad \frac{1-u^2}{u^3+u}du=\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|;$$

$\displaystyle\int\frac{1-u^2}{u+u^3}du=\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du$; Разложим подынтегральное выражение на простые дроби.

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+D}{u^2+1}=\frac{A(u^2+1)+u(Bu+D)}{u^3+u}=\frac{Au^2+A+Bu^2+Du}{u^3+u};$$

$$\begin{cases}A+B=-1\\ D=0\\ A=1\end{cases} \quad \begin{cases}A=1\\ D=0\\ B=-2\end{cases} \qquad \frac{1-u^2}{u+u^3}=\frac{1}{u}-\frac{2u}{u^2+1};$$

$$\int\frac{1-u^2}{u+u^3}du=\int\frac{du}{u}-\int\frac{2u\,du}{u^2+1}=\ln|u|-\int\frac{d(u^2+1)}{u^2+1}=\ln|u|-\ln|u^2+1|.$$

$$\ln|u|-\ln|u^2+1|=\ln|x|+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{u}{u^2+1}\right|=\ln|Cx|$$

$$\frac{u}{u^2+1}=Cx;$$

Т.к. $y=ux$, то $u=\dfrac{y}{x}$, следовательно:

$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=Cx; \qquad \frac{y\cdot x^2}{x(x^2+y^2)}=Cx;$$

$$\boxed{\frac{y}{x^2+y^2}=C}$$

б) $y''\cdot tg y = 2\cdot (y')^2$

Уравнение допускает понижение порядка. Положим $y'=p(y)$, тогда $y''=p\frac{dp}{dy}$, уравнение примет вид: $p\frac{dp}{dy}\cdot tg y = 2p^2$

$p=0$ или $\frac{dp}{dy}=ctg y\cdot 2p$; $\frac{dp}{p}=2\cdot\frac{\cos y}{\sin y}dy$;

$y'=0$, значит $\boxed{y=C}$

почленно интегрируя находим:

$\int\frac{dp}{p}=\ln|p|$, $\int\frac{2\cos y}{\sin y}dy=\int\frac{2d(\sin y)}{\sin y}=2\ln|\sin y|$.

$\ln|p|=2\cdot\ln|\sin y|+\ln|C_1|$, $\ln|p|=\ln|C_1\cdot\sin^2 y|$

Следовательно $p=C_1\cdot\sin^2 y$; $\frac{dy}{dx}=C_1\cdot\sin^2 y$; $\frac{dy}{\sin^2 y}=C_1\cdot dx$.

Почленно интегрируя, находим:

$\int\frac{dy}{\sin^2 y}=-ctg y$; $\int C_1 dx = C_1\cdot x - C_2$

$-ctg y = C_1\cdot x - C_2$; $ctg y = C_2 - C_1\cdot x$, $\boxed{y=arcctg(C_2-C_1\cdot x)}$

Проверка:

1) $y=C$, $y'=0$, $y''=0$. Подставим значение в уравнение: $0\cdot tg C = 2\cdot 0$, $0=0$.

Получено тождество, решение верное.

2) $y=arcctg(C_2-C_1 x)$, $y'=-\frac{1}{1+(C_2-C_1 x)^2}\cdot(-C_1)=\frac{C_1}{1+(C_2-C_1 x)^2}$

$$y''=C_1\cdot\frac{0-2\cdot(C_2-C_1\cdot x)\cdot(-C_1)}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2}=\frac{2C_1^2\cdot(C_2-C_1\cdot x)}{(1+(C_2-C_1\cdot x)^2)^2};$$

Подставим значения в уравнение:

$$\frac{2C_1^2\cdot(C_2-C_1\cdot x)}{(1+(C_2-C_1\cdot x)^2)^2}\cdot tg(arcctg(C_2-C_1 x))=2\left(\frac{C_1}{(1+(C_2-C_1 x)^2)}\right)^2$$

$$\frac{2C_1^2\cdot(C_2-C_1 x)}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2}\cdot\frac{1}{ctg(arcctg(C_2-C_1 x))}=\frac{2C_1^2}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2}$$

$$\frac{2C_1^2\cdot(C_2-C_1 x)}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2\cdot(C_2-C_1\cdot x)}=\frac{2C_1^2}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2}$$

$$\frac{2C_1^2}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2}=\frac{2C_1^2}{(1+(C_2-C_1 x)^2)^2}$$, получено тождество, решение верное.

(3) $y''+4y'-12y=8\sin 2x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$

Соответствующее однородное уравнение $y''+4y'-12y=0$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda-12=0$

$D=4^2-4\cdot(-12)=16+48=64; \quad \lambda=\frac{-4\pm 8}{2}=-2\pm 4; \quad \lambda_1=-6; \ \lambda_2=2.$

Общее решение однородного уравнения $u=C_1\cdot e^{-6x}+C_2\cdot e^{2x}$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде: $y_1=A\cos 2x+B\sin 2x$.

Дифференцируя находим:

$y_1'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x; \quad y_1''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$

Подставим найденные значения в уравнение:

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-8A\sin 2x+8B\cos 2x-12A\cos 2x-12B\sin 2x=8\sin 2x$

$-16A\cos 2x-16B\sin 2x-8A\sin 2x+8B\cos 2x=8\sin 2x$

$\begin{cases}-16A+8B=0\\-16B-8A=8\end{cases} \quad \begin{cases}B=2A\\-40A=8\end{cases} \quad \begin{cases}A=-\frac{1}{5}\\B=-\frac{2}{5}\end{cases} \quad y_1=-\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{2}{5}\sin 2x.$

Общее решение неоднородного уравнения $y=u+y_1$, т.е.

$y=C_1\cdot e^{-6x}+C_2\cdot e^{2x}-\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{2}{5}\sin 2x.$

Определим значения C_1 и C_2.

$y'=-6C_1e^{-6x}+2C_2e^{2x}+\frac{2}{5}\sin 2x-\frac{4}{5}\cos 2x$

Т.к. $y(0)=0$, $y'(0)=0$, то

$\begin{cases}C_1\cdot e^0+C_2\cdot e^0-\frac{1}{5}\cos 0-\frac{2}{5}\sin 0=0\\-6C_1\cdot e^0+2C_2\cdot e^0+\frac{2}{5}\sin 0-\frac{4}{5}\cos 0=0\end{cases} \quad \begin{cases}C_1+C_2-\frac{1}{5}=0\\-6C_1+2C_2-\frac{4}{5}=0\end{cases} \quad \begin{cases}C_1+C_2=\frac{1}{5}\\-3C_1+C_2=\frac{2}{5}\end{cases}$

$\begin{cases}C_1+C_2=\frac{1}{5}\\4C_1=-\frac{1}{5}\end{cases} \quad \begin{cases}C_1=-\frac{1}{20}\\C_2=\frac{1}{4}\end{cases}$

$$\boxed{y=-\frac{1}{20}e^{-6x}+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{2}{5}\cdot\sin 2x}$$

(4) $\begin{cases} x' = -7x+5y \\ y' = 4x-8y \end{cases}$

Из первого уравнения системы находим: $y=\frac{1}{5}x'+\frac{7}{5}x$ (*)

Дифференцируя (*), получаем: $y'=\frac{1}{5}x''+\frac{7}{5}x'$ (**).

Подставим (*) и (**) во второе уравнение системы

$$\frac{1}{5}x''+\frac{7}{5}x'=4x-8\left(\frac{1}{5}x'+\frac{7}{5}x\right)$$

$$x''+7x'=20x-8x'-56x$$

$$x''+15x'+36x=0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+15\lambda+36=0$

$$(\lambda+3)(\lambda+12)=0,\quad \lambda_1=-12,\ \lambda_2=-3.$$

$$x=C_1\cdot e^{-12t}+C_2\cdot e^{-3t}.$$

$$x'=-12C_1\cdot e^{-12t}-3C_2\cdot e^{-3t}$$

$$y=\frac{1}{5}x'+\frac{7}{5}x=-\frac{12}{5}C_1e^{-12t}-\frac{3}{5}C_2e^{-3t}+\frac{7}{5}C_1e^{-12t}+\frac{7}{5}C_2e^{-3t}=-C_1e^{-12t}+\frac{4}{5}C_2e^{-3t}$$

Общее решение системы: $\boxed{\begin{aligned} x&=C_1\cdot e^{-12t}+C_2\cdot e^{-3t} \\ y&=-C_1e^{-12t}+\frac{4}{5}\cdot C_2e^{-3t}\end{aligned}}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$;

Применим предельный признак сравнения. Для сравнения возьмём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ – это ряд Дирихле вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=\frac{3}{2}>1$, он сходится.

Имеем: $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $b_n=\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4+1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}=1$$

Т.к. существует конечный отличный от нуля предел, то ряды ведут себя одинаково. Значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ <u>сходится</u>.