(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{5}{4}}}=\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{(x-\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt5}{2})}+C=$

$=\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt5}\right)+C.$

(2) $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx;$ Положим $t=\sqrt{x+2}$, тогда $x+2=t^2$, $x=t^2-2$, $dx=2t\,dt$.
Интеграл принимает вид:

$\int\frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-2-3}=\int\frac{2t^2dt}{t^2-5}=2\int\frac{t^2-5+5}{t^2-5}dt=2\int dt+10\int\frac{dt}{t^2-5}=2t+10\cdot\frac{1}{2\sqrt5}\ln\left|\frac{t-\sqrt5}{t+\sqrt5}\right|+C.$

Выполнив обратную подстановку, получим:

$\int\frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx=2\sqrt{x+2}+\sqrt5\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt5}{\sqrt{x+2}+\sqrt5}\right|+C$

(3) $\int_0^1\arcsin x\,dx$

Интегрируем по частям: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$u=\arcsin x,\quad du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad dv=dx,\quad v=x$

$\int_0^1\arcsin x\,dx=x\cdot\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1\cdot\arcsin1-0\cdot\arcsin0+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-1^2}-\sqrt{1-0^2}=$

$=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}\approx0{,}571$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x};$

пусть $t=tg\frac{x}{2}$, тогда $t_1=tg0=0$, $t_2=tg\frac{\pi}{4}=1$,

$dx=\frac{2dt}{t^2+1}$, $\sin x=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$, интеграл примет вид:

$\int_0^1\frac{\left(\frac{2dt}{t^2+1}\right)}{\left(2+\frac{2t}{t^2+1}\right)}=\int_0^1\frac{2\cdot(t^2+1)dt}{(t^2+1)(2t^2+2+2t)}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}=\int_0^1\frac{dt}{(t^2+2t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}=$

$=\int_0^1\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}=\frac{1}{(\frac{\sqrt3}{2})}\cdot arctg\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt3}arctg\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)\Big|_0^1=$

$=\frac{2}{\sqrt3}arctg\left(\frac{2+1}{\sqrt3}\right)-\frac{2}{\sqrt3}arctg\frac{1}{\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt3}arctg\sqrt3-\frac{2}{\sqrt3}arctg\frac{1}{\sqrt3}=\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{6}=$

$=\frac{2\pi}{3\sqrt3}-\frac{\pi}{3\sqrt3}=\frac{\pi}{3\sqrt3}\approx$

⑤ $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

В точке $x=1$ подынтегральное выражение терпит разрыв, значит:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x-3} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)(x+3)};$$

Разложим подынтегральное выражение на простые дроби.

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-B}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-B)}{x^2+2x-3};$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A=1 \\ B=-A \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)};$$

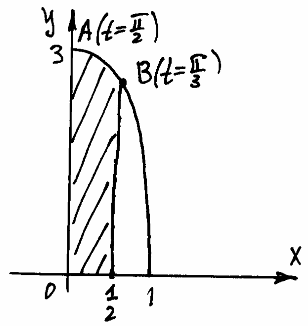
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x-3} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)}\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3|\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{1}{4}\ln 1 - \frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{4}\ln\varepsilon + \frac{1}{4}\ln(4+\varepsilon)\right) = -\frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{4}\ln(+0) + \frac{1}{4}\ln 4 =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{4}\cdot(-\infty) + \frac{1}{4}\ln 4 = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{5} + \infty = +\infty;$$

Несобственный интеграл расходится.

⑥ $x=\cos t,\ y=3\cdot\sin t,\quad t_1=\frac{\pi}{2},\ t_2=\frac{\pi}{3}.$



$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

Сводим интеграл к переменной t.

$dx = -\sin t\,dt,\quad x_1=0 \Rightarrow t_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{1}{2} \Rightarrow t_2=\frac{\pi}{3}.$

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin t\cdot(-\sin t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 t\,dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\ (ед^2) \approx 1{,}435\ (ед^2)$$

⑦ $y=2x,\ y=2,\ x=0$. Ось вращения Oy.

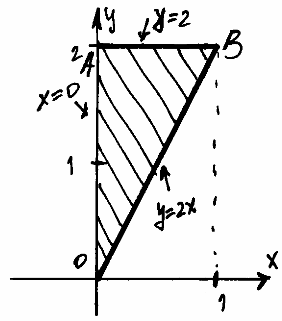
Точки пересечения линий: $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(1;2)$ – см. рис.

При вращении вокруг оси Oy: $V_y=\pi\int_{y_1}^{y_2}(x(y))^2dy$.

$y=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}y,\quad y_1=0,\ y_2=2.$

$$V=\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}y\right)^2dy=\frac{\pi}{4}\int_0^2 y^2dy=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^2=$$

$$=\frac{\pi}{12}\cdot(2^3-0)=\frac{8\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}\ (ед^3)\approx 2{,}094\ (ед^3)$$



8.8 $u=\operatorname{arctg}(xy^2+z)$, $M_0(2;1;0)$

Находим частные производные функции $u(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot y^2=\frac{y^2}{1+(xy^2+z)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot x\cdot 2y=\frac{2xy}{1+(xy^2+z)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2}\cdot 1=\frac{1}{1+(xy^2+z)^2};$$

Находим значения производных в точке M_0

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=\frac{1^2}{1+(2\cdot1^2+0)^2}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=\frac{2\cdot2\cdot1}{1+(2\cdot1^2+0)^2}=\frac{4}{1+2^2}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=\frac{1}{1+(2\cdot1^2+0)^2}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

98 $z=x^2+y^2+xy+x-y+1$

Находим частные производные первого порядка функции $z(x,y)$.

$z'_x=2x+y+1, \quad z'_y=2y+x-1.$

Пользуясь необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки: $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 2y+x-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-1-2x \\ -2-4x+x-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

Стационарная точка $(-1;1)$. Исследуем её по знаку определителя, составленного из значений частных производных второго порядка в этой точке.

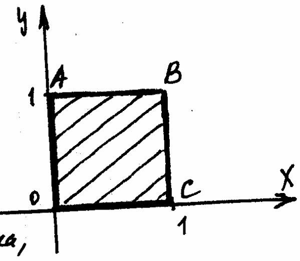
$z''_{xx}=2, \quad z''_{xy}=1, \quad z''_{yy}=2.$

$A=z''_{xx}(-1;1)=2; \quad B=z''_{xy}(-1;1)=1; \quad C=z''_{yy}(-1;1)=2.$

$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3>0,$ $A=2>0$, значит это точка минимума.

$z_{min}=z(-1;1)=1+1-1-1-1+1=0.$

(10) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$; $\overline{D}$: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1$.



Ищем стационарные точки, лежащие в области $\overline{D}$:

$z'_x = 3-2x-y$; $z'_y = 6-x-2y$.

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3-2x-y=0 \\ 6-x-2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3 \\ x=0. \end{cases}$ $M(0;3)$ - стационарная точка, но она не принадлежит области $\overline{D}$.

Рассмотрим функцию на границе области D.

AB: $y=1$, $z=z(x)=3x+6-x^2-x-1=2x-x^2+5$ $(0 \le x \le 1)$.

$z' = 2-2x$, $z'=0$, если $x=1$, $z(1)=2-1+5=6$.

На концах отрезка AB: $z(A)=5$; $z(B)=6$.

BC: $x=1$, $z=z(y)=3+6y-1-y-y^2=-y^2+5y+2$ $(0 \le y \le 1)$

$z'=-2y+5$, $z'=0$, если $y=2{,}5$ но эта точка не принадлежит отрезку BC.

На концах отрезка BC: $z(B)=-1+5+2=6$; $z(C)=2$.

OA: $x=0$, $z=z(y)=6y-y^2$; $(0 \le y \le 1)$.

$z'=6-2y$, $z'=0$ если $y=3$, но эта точка не принадлежит OA.

На концах отрезка OA: $z(O)=0$, $z(A)=6-1=5$.

OC: $y=0$, $z=z(x)=3x-x^2$ $(0 \le x \le 1)$

$z'=3-2x$, $z'=0$ если $x=\frac{3}{2}$, но эта точка не принадлежит OC.

На концах отрезка OC: $z(O)=0$, $z(C)=3-1=2$.

Сравнивая все найденные значения заключаем что в области $\overline{D}$:

$z_{наим.} = z(0;0) = 0$

$z_{наиб.} = z(1;1) = 6$.