1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2x+1}{x^2}}=(1^{\infty})$

Пусть $t=2x$, тогда $x=\frac{t}{2}$, $t\to 0$ при $x\to 0$.

Предел примет вид:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{t+1}{(\frac{t}{2})^2}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{4(t+1)}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{4(t+1)}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{4(t+1)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{4(t+1)}{t}}=e^{\frac{4(0+1)}{0}}=e^{\frac{4}{0}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

(при $x\to -0$) $\lim\limits_{x\to -0}(1+2x)^{\frac{2x+1}{x^2}}=(1^{\infty})$

пусть $t=2x$, тогда $x=\frac{t}{2}$, $t\to -0$ при $x\to -0$. Получаем:

$$\lim_{t\to -0}(1+t)^{\frac{t+1}{(\frac{t}{2})^2}}=\lim_{t\to -0}(1+t)^{\frac{4(t+1)}{t^2}}=\lim_{t\to -0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{4(t+1)}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to -0}e^{\frac{4(t+1)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to -0}\frac{4(t+1)}{t}}=e^{\frac{4(0+1)}{-0}}=e^{\frac{4}{(-0)}}=e^{-\infty}=0.$$

② $y=\frac{2x-4}{x+1}$; $y_0=4$.

Определим абсциссу точки, лежащей на гиперболе и имеющей ординату $y=4$. Для этого решим уравнение:

$\frac{2x-4}{x+1}=4 \Rightarrow$ $2x-4=4(x+1)$

$2x-4=4x+4$

$2x=-8$, $x_0=-4$. $M(-4;4)$.

Уравнение касательной ищем в виде: $y-y_0=y_0'\cdot(x-x_0)$. (*)

Находим производную и её значение в точке $x_0=-4$.

$$y'=\frac{(2x-4)'\cdot(x+1)-(x+1)'\cdot(2x-4)}{(x+1)^2}=\frac{2\cdot(x+1)-1\cdot(2x-4)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x+4}{(x+1)^2}=\frac{6}{(x+1)^2};$$

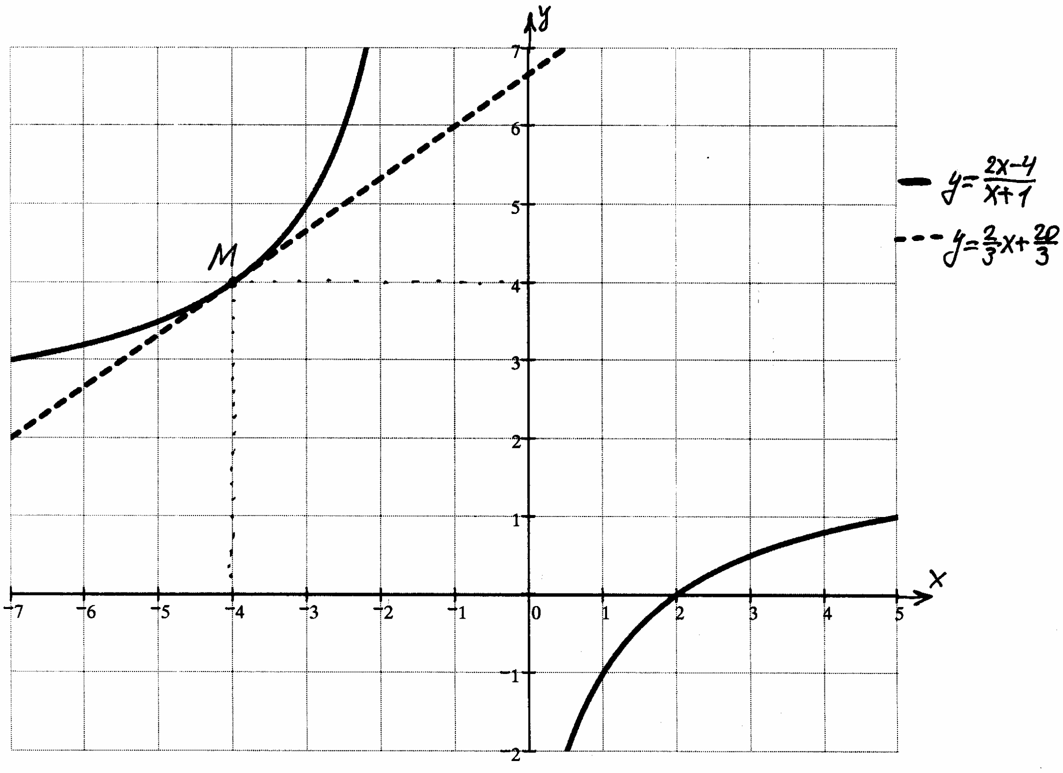
$$y_0'=y'(-4)=\frac{6}{(-4+1)^2}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};$$

Подставим значения в (*):

$y-4=\frac{2}{3}\cdot(x-(-4))$

$y-4=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$; $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}+4$; $\boxed{y=\frac{2}{3}x+\frac{20}{3}}$ – уравнение искомой касательной.

Выполняем чертёж:



3

$y=(x-1)^2\cdot e^{-x^2+2x}$

1) ООФ: $x\in(-\infty;+\infty)$

2) Точек разрыва нет, функция непрерывна при $x\in(-\infty;+\infty)$.

3) $y(-x)=(-x-1)^2\cdot e^{-(-x)^2+2(-x)}=(x+1)^2\cdot e^{-x^2-2x}$; $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$.
Функция не является ни чётной, ни нечётной. Функция непериодическая

4) При $x=0$ $y=(0-1)^2\cdot e^0=1$. Точка пересечения с осью Oy $(0;1)$.
$y=0$, если $x=1$. Точка пересечения с осью Ox $(1;0)$.
$y>0$ в интервалах $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$

5) Вертикальных асимптот нет. Ищем невертикальные асимптоты.

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2\cdot e^{-x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-2+\frac{1}{x}\right)}{e^{x^2-2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-2+\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{x^2-2x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{(2x-2)\cdot e^{x^2-2x}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

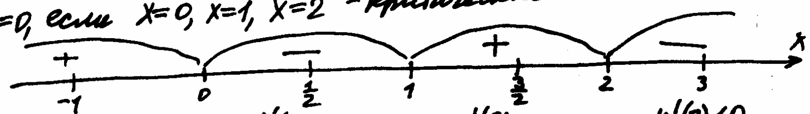
$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2\cdot e^{-x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^{x^2-2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left((x-1)^2\right)'}{\left(e^{x^2-2x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)}{(2x-2)\cdot e^{x^2-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2-2x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

При $x\to-\infty$ значения k_2 и b_2 такие же.
Прямая $y=0$ асимптота графика при $x\to\pm\infty$

6) $y'=2(x-1)\cdot e^{-x^2+2x}+(x-1)^2\cdot e^{-x^2+2x}\cdot(-2x+2)=2(x-1)(1-x^2+2x-1)\cdot e^{-x^2+2x}=$
$=2(x-1)(2-x)\cdot x\cdot e^{-x^2+2x}=2\cdot(-x^3+3x^2-2x)\cdot e^{-x^2+2x}$

$y'=0$, если $x=0$, $x=1$, $x=2$ – критические точки.



$y'(-1)>0$ $y'(\frac{1}{2})<0$ $y'(\frac{3}{2})>0$ $y'(3)<0$

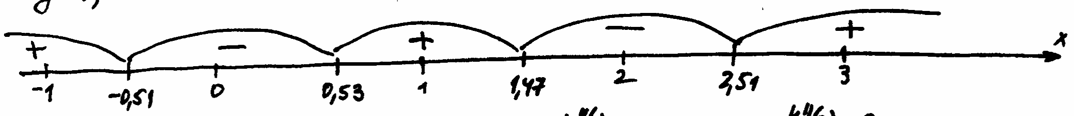
Функция возрастает в интервалах $(-\infty;0)$, $(1;2)$, где $y'>0$
Функция убывает в интервалах $(0;1)$, $(2;+\infty)$, где $y'<0$
Точки максимума: $x=0$, $x=2$. $y(0)=y(2)=1$
Точка минимума: $x=1$, $y(1)=0$

x	$-\infty;0$	0	$0;1$	1	$1;2$	2	$2;+\infty$
y'	+	0	–	0	+	0	–
y	↗	1	↘	0	↗	1	↘
		max		min		max	

7) $y'' = 2\cdot(-3x^2+6x-2)\cdot e^{-x^2+2x} + 2(x^3+3x^2-2x)\cdot e^{-x^2+2x}\cdot(-2x+2) =$

$= 2(-3x^2+6x-2+2x^4-6x^3+4x^2-2x^3+6x^2-4x)\cdot e^{-x^2+2x} = 2(2x^4-8x^3+7x^2+2x-2)\cdot e^{-x^2+2x}$

$y''=0$, если $x\approx-0{,}51$ $x\approx0{,}53$ $x\approx1{,}47$ $x\approx2{,}51$ (результаты получены в MathCad).



$y''(-1)>0$ $y''(0)<0$ $y''(1)>0$ $y''(2)<0$ $y''(3)>0$

график обращён выпуклостью вверх в интервалах $(-0{,}51; 0{,}53)$, $(1{,}47; 2{,}51)$, где $y''<0$

график обращён выпуклостью вниз в интервалах $(-\infty; -0{,}51)$, $(0{,}53; 1{,}47)$, $(2{,}51; +\infty)$, где $y''>0$.

Точки перегиба: $x=-0{,}51$; $x=0{,}53$; $x=1{,}47$; $x=2{,}51$

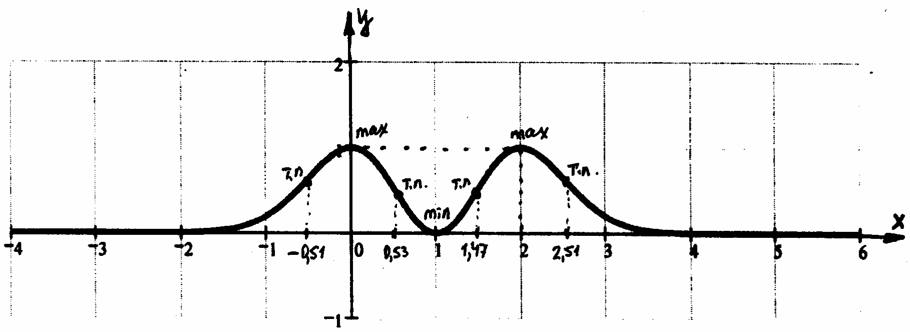
x	$-\infty; -0{,}51$	$-0{,}51$	$-0{,}51; 0{,}53$	$0{,}53$	$0{,}53; 1{,}47$	$1{,}47$	$1{,}47; 2{,}51$	$2{,}51$	$2{,}51; +\infty$
y''	+	0	—	0	+	0	—	0	+
y	$\cup$	0,63	$\cap$	0,48	$\cup$	0,48	$\cap$	0,63	$\cup$
		т.п.		т.п.		т.п.		т.п.	

8) Схематическое изображение графика:

Найдем для построения графика несколько вспомогательных точек

x	−2	−1	3	4
y	0,003	0,199	0,199	0,003

$y = (x-1)^2\cdot e^{-x^2+2x}$



④ $x=\frac{y^2}{4}$; $xy=2$, $x=4$

Определим точки пересечения линий:

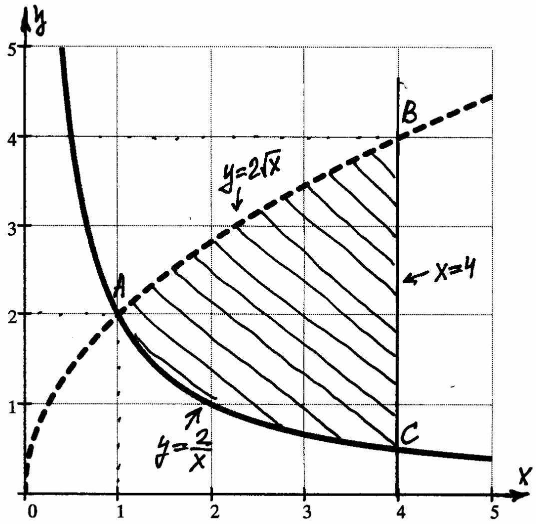
$\begin{cases} x=\frac{y^2}{4} \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^3}{4}=2$, $y=2$.

$x=\frac{2^2}{4}=1$.

$A(1;2)$.

$\begin{cases} x=4 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{2}{x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $C\left(4;\frac{1}{2}\right)$.

$\begin{cases} x=\frac{y^2}{4} \\ x=4 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=16 \\ x=4 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \text{ (т.к. фигура в 1-й четв.)} \\ x=4 \end{cases}$ $B(4;4)$.



Используем формулу $S=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$.

Имеем: $x_1=1$, $x_2=4$, $xy=2 \Rightarrow y=\frac{2}{x}$

$x=\frac{y^2}{4} \Rightarrow y^2=4x \Rightarrow y=2\sqrt{x}$; значит: $f_1(x)=\frac{2}{x}$, $f_2(x)=2\sqrt{x}$.

Находим площадь:

$$S=\int\limits_1^4\left(2\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx=\left(2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\cdot\ln|x|\right)\Big|_1^4=\left(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{4^3}-2\ln 4\right)-\left(\frac{4}{3}\sqrt{1^3}-2\ln 1\right)=$$

$$=\frac{4}{3}2^3-2\cdot\ln 2^2-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}-4\ln 2-\frac{4}{3}=\frac{28}{3}-4\cdot\ln 2\ (ед^2)\approx 6{,}561\ (ед^2).$$

⑤ $$\int\limits_0^4\frac{3(x+2)\,dx}{5+4x-x^2}=\int\limits_0^4\frac{3(x+2)dx}{(5-x)(x+1)}=\int\limits_0^4\frac{3x+6}{(5-x)(x+1)}dx;$$

Разложим подынтегральное выражение на простые дроби.

$$\frac{3x+6}{(5-x)(x+1)}=\frac{A}{5-x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(5-x)}{(5-x)(x+1)}=\frac{Ax+A+5B-Bx}{5+4x-x^2}=\frac{(A-B)x+(A+5B)}{5+4x-x^2}$$

Решаем систему уравнений:

$\begin{cases} A-B=3 \\ A+5B=6 \end{cases}$ $\begin{cases} A-B=3 \\ 6B=3 \end{cases}$ $\begin{cases} A=3+B \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{7}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{3x+6}{5+4x-x^2}=\frac{7}{2(5-x)}+\frac{1}{2(x+1)};$$

$$\int\limits_0^4\frac{3(x+2)dx}{5+4x-x^2}=\frac{7}{2}\int\limits_0^4\frac{dx}{5-x}+\frac{1}{2}\int\limits_0^4\frac{dx}{x+1}=-\frac{7}{2}\ln|5-x|\Big|_0^4+\frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_0^4=$$

$$=-\frac{7}{2}\ln 1+\frac{7}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 1=4\cdot\ln 5\approx 6{,}438.$$

(6)

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	2,5	3	4,5	5	7

$y=x^2-3x+4$; $y=ax+b$;

Составим вспомогательную расчётную таблицу.

№	x	y	x^2	xy
1	2	2,5	4	5
2	2,5	3	6,25	7,5
3	3	4,5	9	13,5
4	3,5	5	12,25	17,5
5	4	7	16	28
$\sum$	15	22	47,5	71,5

Для нахождения значений a и b составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 5b+15a=22 \\ 15b+47{,}5a=71{,}5 \end{cases} \begin{cases} 15b+45a=66 \\ 15b+47{,}5a=71{,}5 \end{cases} \begin{cases} 2{,}5a=5{,}5 \\ b=4{,}4-3a \end{cases} \begin{cases} a=2{,}2 \\ b=4{,}4-3\cdot 2{,}2 \end{cases} \begin{cases} a=2{,}2 \\ b=-2{,}2 \end{cases}$$

Уравнение линейной зависимости имеет вид: $\boxed{y=2{,}2\cdot x-2{,}2}$

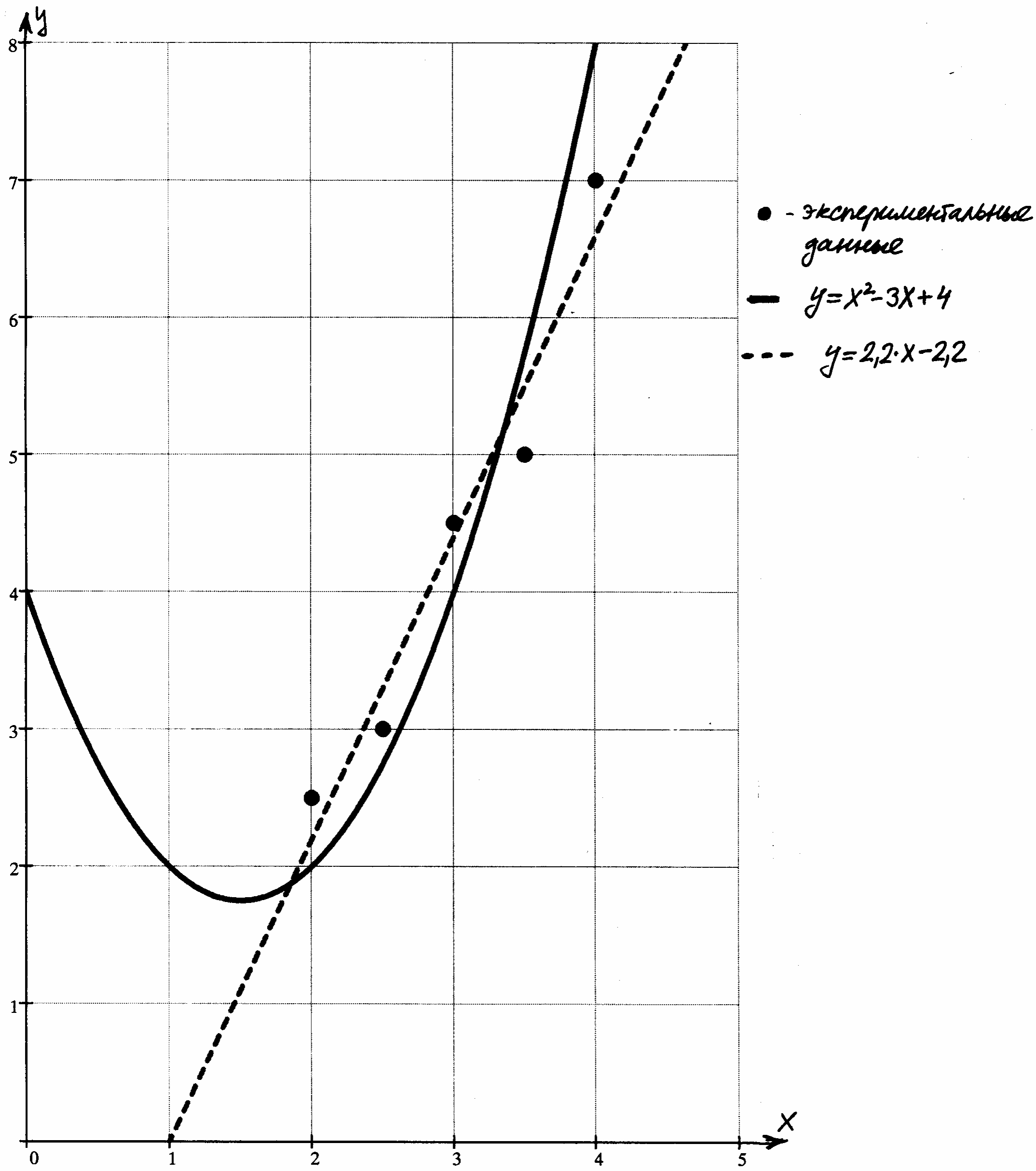
Для выяснения того, какая зависимость лучше выравнивает экспериментальные данные, составим расчётную таблицу;

Введём обозначения: $A_i=x_i^2-3x_i+4$; $B_i=2{,}2\cdot x_i-2{,}2$.

№	x_i	y_i	A_i	B_i	$(A_i-y_i)^2$	$(B_i-y_i)^2$
1	2	2,5	2	2,2	0,25	0,09
2	2,5	3	2,75	3,3	0,0625	0,09
3	3	4,5	4	4,4	0,25	0,01
4	3,5	5	5,75	5,5	0,5625	0,25
5	4	7	8	6,6	1	0,16
$\sum$					2,125	0,6.

Т.к. $\sum_i (B_i-y_i)^2 < \sum_i (A_i-y_i)^2$, то зависимость $y=2{,}2\cdot x-2{,}2$ лучше (в смысле МНК) выравнивает экспериментальные данные.

Чертёж на обратной стороне.



y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
- экспериментальные данные
$y=x^2-3x+4$
$y=2{,}2\cdot x-2{,}2$

⑦ $x\cdot(1+y)\cdot y'=y^2;\quad y(1)=1$

$$x\cdot(1+y)\cdot\frac{dy}{dx}=y^2;$$

$$\frac{(1+y)\,dy}{y^2}=\frac{dx}{x};$$

Уравнение имеет вид $P(y)dy=Q(x)dx$, значит это уравнение с разделяющимися переменными. Почленно интегрируя находим:

$$\int\frac{(1+y)\,dy}{y^2}=\int\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}\right)dy=-\frac{1}{y}+\ln|y|;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|;$$

Следовательно, общий интеграл уравнения:

$$-\frac{1}{y}+\ln|y|=\ln|x|+C.$$

Определим значение C из условия $y(1)=1$.

$$-\frac{1}{1}+\ln 1=\ln 1+C;\qquad -1+0=0+C,\quad C=-1.$$

Значит: $\ln|x|-1+\frac{1}{y}-\ln|y|=0$, или $\boxed{\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{1}{y}-1=0}$

Проверка:

$$F(x,y)=\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{1}{y}-1;$$

$$F'_x=\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y}+0=\frac{1}{x};\qquad F'_y=\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-\frac{y+1}{y^2};$$

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{y+1}{y^2}\right)}=\frac{y^2}{x(y+1)};$$

Подставим значение y' в уравнение:

$$x\cdot(1+y)\cdot\frac{y^2}{x(y+1)}=y^2;$$

$$y^2=y^2$$

Получено тождество, значит уравнение решено верно.