

$R1 = 3$	(Ом)	$J1 = 4$	(А)
$R2 = 1$	(Ом)	$E2 = 16$	(В)
$R3 = 2$	(Ом)	$E3 = 0$	(В)
$R4 = 2$	(Ом)	$E4 = 34$	(В)
$R5 = 7$	(Ом)	$E5 = 16$	(В)
$R6 = 5$	(Ом)	$E6 = 4$	(В)

Рис. 1. Расчетная схема цепи.

1. Составить на основании законов Кирхгофа уравнения, необходимые для определения всех токов. Расчет по этим уравнениям не выполнять.

По 1 закону Кирхгофа:

$$I_3 - I_5 - J_1 + I_1 = 0$$

$$J_1 - I_1 + I_4 - I_2 = 0$$

$$I_6 + I_5 - I_4 = 0$$

По 2 закону Кирхгофа:

$$I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 = E_4 + E_5$$

$$I_6 \cdot R_6 + I_4 \cdot R_4 + I_2 \cdot R_2 = E_4 + E_2 - E_6$$

$$I_5 \cdot R_5 + I_3 \cdot R_3 - I_6 \cdot R_6 = E_6 + E_5$$

2. Начертить граф. цепи и 3 любых его дерева.

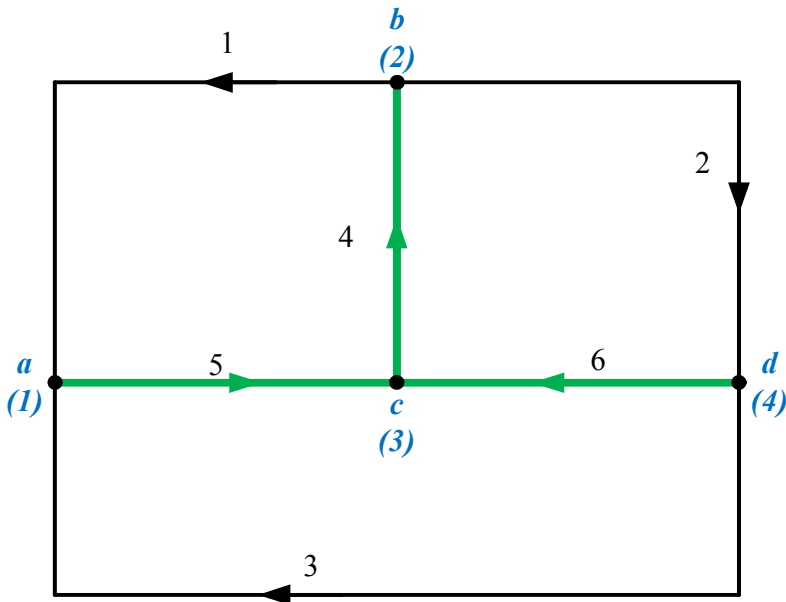


Рис. 2. Граф цепи и три дерева.

Деревья выделены жирной линией.

3. Определить токи всех ветвей методом контурных токов. Расчет выполнить с применением ЭВМ.

Выберем направления контурных токов по часовой стрелке. А токи ветвей направим произвольно.

Ищем контурные сопротивления:

$$R_{11} = R_1 + R_5 + R_4 = 3 + 7 + 2 = 12 \quad (\text{Ом})$$

$$R_{22} = R_2 + R_6 + R_4 = 1 + 5 + 2 = 8 \quad (\text{Ом})$$

$$R_{33} = R_5 + R_6 + R_3 = 7 + 5 + 2 = 14 \quad (\text{Ом})$$

Ищем междуконтурные сопротивления:

$$R_{12} = -R_4 = -2 \quad (\text{Ом}) \qquad R_{21} = R_{12} = -2 \quad (\text{Ом})$$

$$R_{13} = -R_5 = -7 \quad (\text{Ом}) \qquad R_{31} = R_{13} = -7 \quad (\text{Ом})$$

$$R_{23} = -R_6 = -5 \quad (\text{Ом}) \qquad R_{32} = R_{23} = -5 \quad (\text{Ом})$$

Контурные ЭДС:

$$E_{11} = -E_4 - E_5 + J_1 \cdot R_1 = -34 - 16 + 4 \cdot 3 = -38 \quad (\text{В})$$

$$E_{22} = E_4 + E_2 - E_6 = 34 + 16 - 4 = 46 \quad (\text{В})$$

$$E_{33} = E_5 + E_6 = 16 + 4 = 20 \quad (\text{В})$$

Составим систему уравнений по методу контурных токов, для нахождения контурных токов:

$$\begin{cases} I_{k1} \cdot R_{11} + I_{k2} \cdot R_{12} + I_{k3} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{k1} \cdot R_{21} + I_{k2} \cdot R_{22} + I_{k3} \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_{k1} \cdot R_{31} + I_{k2} \cdot R_{32} + I_{k3} \cdot R_{33} = E_{33} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{pmatrix} 12 & -2 & -7 \\ -2 & 8 & -5 \\ -7 & -5 & 14 \end{pmatrix} = 456$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{pmatrix} -38 & -2 & -7 \\ 46 & 8 & -5 \\ 20 & -5 & 14 \end{pmatrix} = 912$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{pmatrix} 12 & -38 & -7 \\ -2 & 46 & -5 \\ -7 & 20 & 14 \end{pmatrix} = 4.56 \times 10^3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{pmatrix} 12 & -2 & -38 \\ -2 & 8 & 46 \\ -7 & -5 & 20 \end{pmatrix} = 2.736 \times 10^3$$

Используя метод Крамера, нашли неизвестные контурные токи в системе уравнений:

$$I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{912}{456} = 2 \quad (\text{A})$$

$$I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4.56 \times 10^3}{456} = 10 \quad (\text{A})$$

$$I_{k3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2.736 \times 10^3}{456} = 6 \quad (\text{A})$$

Найдем токи, которые протекают по ветвям цепи:

$$I_1 = J_1 - I_{k1} = 4 - 2 = 2 \quad (\text{A})$$

$$I_2 = I_{k2} = 10 \quad (\text{A})$$

$$I_3 = I_{k3} = 6 \quad (\text{A})$$

$$I_4 = I_{k2} - I_{k1} = 10 - 2 = 8 \quad (\text{A})$$

$$I_5 = I_{k3} - I_{k1} = 6 - 2 = 4 \quad (\text{A})$$

$$I_6 = I_{k2} - I_{k3} = 10 - 6 = 4 \quad (\text{A})$$

4. Составить систему уравнений узловых потенциалов. Расчет по этим уравнениям не выполнять.

Принимаем четвертый узел за базовый.

Ищем узловые проводимости:

$$G_{11} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0.976 \quad (\text{См})$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.833 \quad (\text{См})$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = 0.843 \quad (\text{См})$$

Ищем междуузловые проводимости:

$$G_{12} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{3} = 0.333 \quad (\text{См}) \quad G_{21} = G_{12} = 0.333 \quad (\text{См})$$

$$G_{13} = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{7} = 0.143 \quad (\text{См}) \quad G_{31} = G_{13} = 0.143 \quad (\text{См})$$

$$G_{23} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (\text{См}) \quad G_{32} = G_{23} = 0.5 \quad (\text{См})$$

Сумма токов которые входят в узлы:

$$I_{v1} = -\frac{E_5}{R_5} - J_1 = -\frac{16}{7} - 4 = -6.286 \quad (\text{А})$$

$$I_{v2} = J_1 + \frac{E_4}{R_4} + \frac{-E_2}{R_2} = 4 + \frac{34}{2} + \frac{-16}{1} = 5 \quad (\text{А})$$

$$I_{v3} = \frac{E_5}{R_5} + \frac{-E_4}{R_4} + \frac{-E_6}{R_6} = \frac{16}{7} + \frac{-34}{2} + \frac{-4}{5} = -15.514 \quad (\text{А})$$

Составляем ситему уравнений для нахождения напряжений в узлах:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{13} = I_{v1} \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} - \varphi_3 \cdot G_{23} = I_{v2} \\ -\varphi_1 \cdot G_{31} - \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} = I_{v3} \end{cases}$$

5. С помощью токов, вычислить в п.3, определить потенциалы всех узлов и, подставив их значения в уравнение узловых потенциалов, проверить их правильность.

$$\varphi_1 = -I_3 \cdot R_3 = -6 \cdot 2 = -12 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I_1 \cdot R_1 = -12 + 2 \cdot 3 = -6 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - E_4 + I_4 \cdot R_4 = -6 - 34 + 8 \cdot 2 = -24 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + I_6 \cdot R_6 + E_6 = -24 + 4 \cdot 5 + 4 = 0 \quad (\text{В})$$

Подставляем найденные числовые значения:

$$\varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{13} = I_{v1}$$

$$\varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{13} = -12 \cdot 0.976 - -6 \cdot 0.333 - -24 \cdot 0.143 = -6.286$$

$$-\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} - \varphi_3 \cdot G_{23} = I_{v2}$$

$$-\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} - \varphi_3 \cdot G_{23} = (-12) \cdot 0.333 + -6 \cdot 1.833 - -24 \cdot 0.5 = 5$$

$$-\varphi_1 \cdot G_{31} - \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} = I_{v3}$$

$$-\varphi_1 \cdot G_{31} - \varphi_2 \cdot G_{32} + \varphi_3 \cdot G_{33} = (-12) \cdot 0.143 - -6 \cdot 0.5 + -24 \cdot 0.843 = -15.514$$

Как видим, потенциалы узлов найдены верно.

6. Определить ток ветви 5 с помощью теоремы об активном двухполюснике.

Размыкаем ветвь по которой протекает искомый ток, а остальную часть схемы рассматриваем как активный двухполюсник.

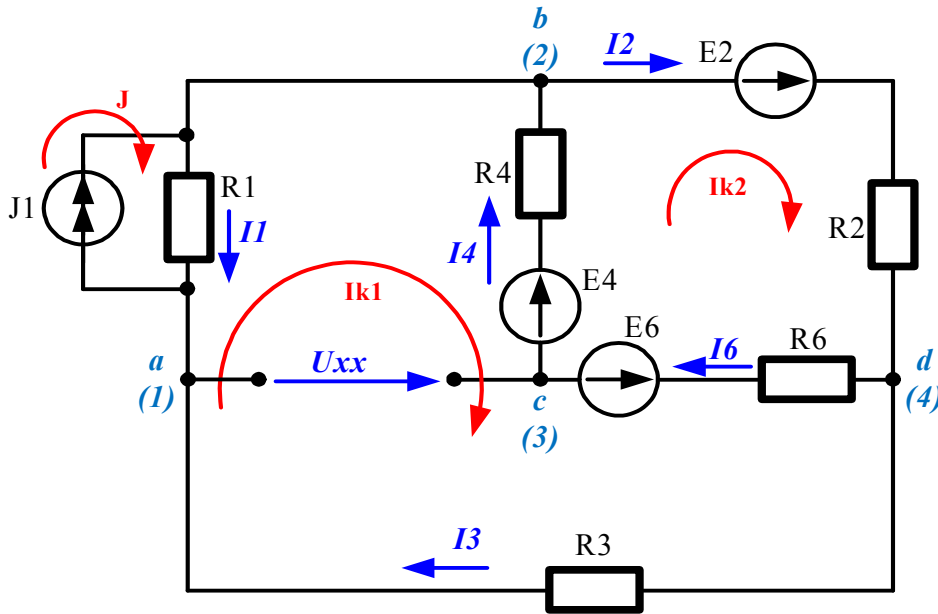


Рис. 3. Расчетная схема цепи для п.6.

Методом контурных токов найдем токи, которые протекают по ветвям:

$$\begin{cases} I_{k1} \cdot (R1 + R3 + R6 + R4) - I_{k2} \cdot (R4 + R6) = J1 \cdot R1 - E4 + E6 \\ -I_{k1} \cdot (R4 + R6) + I_{k2} \cdot (R2 + R4 + R6) = E2 + E4 - E6 \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R1 + R3 + R6 + R4 & -(R4 + R6) \\ -(R4 + R6) & R2 + R4 + R6 \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{bmatrix} 3 + 2 + 5 + 2 & -(2 + 5) \\ -(2 + 5) & 1 + 2 + 5 \end{bmatrix} = 47$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} J1 \cdot R1 - E4 + E6 & -(R4 + R6) \\ E2 + E4 - E6 & R2 + R4 + R6 \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 - 34 + 4 & -(2 + 5) \\ 16 + 34 - 4 & 1 + 2 + 5 \end{bmatrix} = 178$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R1 + R3 + R6 + R4 & J1 \cdot R1 - E4 + E6 \\ -(R4 + R6) & E2 + E4 - E6 \end{vmatrix} = \text{op_det} \begin{bmatrix} 3 + 2 + 5 + 2 & 4 \cdot 3 - 34 + 4 \\ -(2 + 5) & 16 + 34 - 4 \end{bmatrix} = 426$$

Используя метод Крамера, нашли неизвестные контурные токи :

$$I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{178}{47} = 3.787 \quad (\text{A})$$

$$I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{426}{47} = 9.064 \quad (\text{A})$$

Токи протекающие в цепи:

$$I_1 = J_1 - I_{k1} = 4 - 3.787 = 0.213 \quad (\text{A})$$

$$I_2 = I_{k2} = 9.064 \quad (\text{A})$$

$$I_6 = I_{k2} - I_{k1} = 9.064 - 3.787 = 5.277 \quad (\text{A})$$

$$I_3 = I_{k1} = 3.787 \quad (\text{A})$$

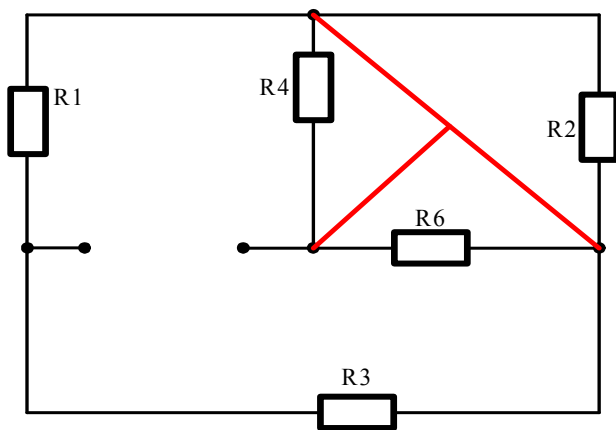
$$I_4 = I_6 = 5.277 \quad (\text{A})$$

Напряжение между зажимами будет:

$$U_{xx} = I_6 \cdot R_6 - I_3 \cdot R_3 + E_6 = 5.277 \cdot 5 - 3.787 \cdot 2 + 4 = 22.809 \quad (\text{B})$$

$$U_{xx} = -I_4 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_1 + E_4 = -5.277 \cdot 2 - 0.213 \cdot 3 + 34 = 22.809 \quad (\text{B})$$

Ищем эквивалентное сопротивление цепи.



Преобразуем треугольник сопротивлений в эквивалентную звезду:

$$R_a = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_6} = \frac{2}{1 + 2 + 5} = 0.25 \quad (\text{Om})$$

$$R_b = \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_4 + R_6} = \frac{5}{1 + 2 + 5} = 0.625 \quad (\text{Om})$$

$$R_c = \frac{R_6 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_6} = \frac{5 \cdot 2}{1 + 2 + 5} = 1.25 \quad (\text{Om})$$

Рис. 4. Расчетная схема для определения эквивалентного сопротивления цепи

$$R_{ekv} = R_c + \frac{(R_a + R_1) \cdot (R_b + R_3)}{R_a + R_b + R_1 + R_3} = 1.25 + \frac{(0.25 + 3) \cdot (0.625 + 2)}{0.25 + 0.625 + 3 + 2} = 2.702 \quad (\text{Om})$$

Искомый ток будет:

$$I_5 = \frac{U_{xx} + E_5}{R_{ekv} + R_5} = \frac{22.809 + 16}{2.702 + 7} = 4 \quad (\text{A})$$

7. Построить графики зависимости мощности, выделяемой на резисторе R5, от величины его сопротивления в пределах от 0 до 10,0Rв5 (по точкам 0; 1,0Rв5; 3,0Rв5; 5,0Rв5; 7,0Rв5; 10,0Rв5).

$$P_{R5} = I5^2 \cdot R5 = \left(\frac{U_{xx} + E5}{R_{ekv} + R5} \right)^2 \cdot R5 = \left(\frac{38.809}{2.702 + R5} \right)^2 \cdot R5$$

$$P(R5') = \left(\frac{38.809}{2.702 + R5'} \right)^2 \cdot R5'$$

$$R5' = 0, 0.1.. 10R_{ekv}$$

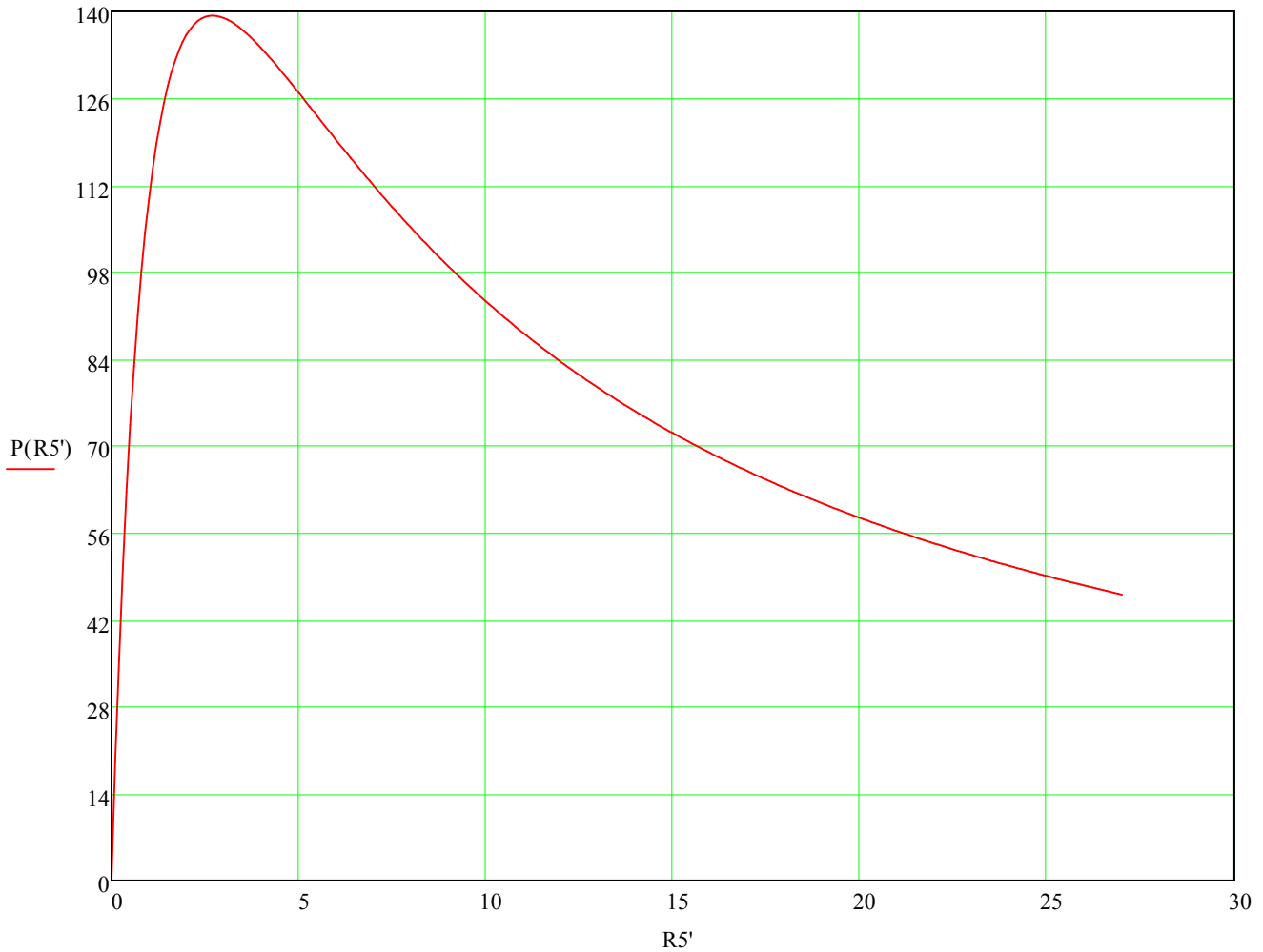


Рис. 5. График зависимости мощности, которая выделяется на R5.

8. Начертить потенциальную диаграмму для любого замкнутого контура, включающего не менее двух источников напряжения.

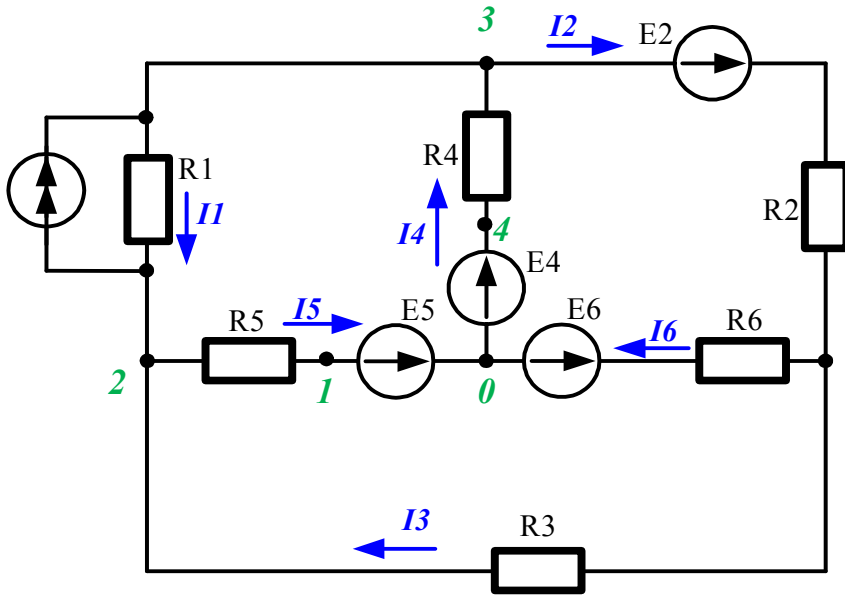


Рис. 6. Схема для определения потенциалов точек.

Ищем потенциалы точек:

$$\varphi_0 = 0 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - E_5 = 0 - 16 = -16 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I_5 \cdot R_5 = -16 + 4 \cdot 7 = 12 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + I_1 \cdot R_1 = 12 + 2 \cdot 3 = 18 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + I_4 \cdot R_4 = 18 + 8 \cdot 2 = 34 \quad (\text{В})$$

$$\varphi_2 = \varphi_4 - E_4 = 34 - 34 = 0 \quad (\text{В})$$

Потенциальная диаграмма

