Содержание

Часть 1. Обработка результатов нескольких серий измерений

Задание

Результаты первой серии измеренеий:

18,70	18,66	18,80	18,81	18,62	18,55	18,87	18,67	18,88	18,94	18,69	18,62	18,72
18,69	18,64											

Результаты второй серии измеренеий:

18,85	18,69	18,69	18,66	18,83	18,58	18,42	18,72	18,77	18,72	18,84	18,89	18,56

Результаты третьей серии измеренеий:

19,00	18,63	18,99	18,43	18,54	18,53	18,87	18,85	18,73	18,88	18,23

Порядок обработки нескольких серий измерений

1. Проверка совпадения средних значений каждой серии.
2. Проверка совпадения дисперсий каждой серии.
3. Выбор методики дальнейшей обработки результатов измерения:

3.1. Выбор методики дальнейшей обработки результатов измерения:

3.2. Обработка результатов по схеме «неравноточные серии».

4. Запись результатов измерений в принятой форме.

1.Обработка каждой серии измерений

Даны три серии измерений. Для каждой серии необходимо найти среднее арифметическое значение, среднее квадратическое отклонение (в дальнейшем СКО) и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического.

Среднее арифметическое находим по формуле:

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{n}$$

где Q – среднее арифметическое серии;

Q_i – значения измерений в серии;

n – число измерений в серии.

$$\bar{Q}_1 = \frac{280,86}{15} = 18,72400 \approx 18,724$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{243{,}22}{13} = 18{,}70923 \approx 18{,}709$$

$$\bar{Q}_3 = \frac{205{,}68}{11} = 18{,}69818 \approx 18{,}698$$

СКО находим по формуле:

$$S_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \bar{Q})^2}{n-1}}$$

где S_Q – СКО серии;

Q – среднее арифметическое серии;

Q_i – значения измерений в серии;

n – число измерений в серии.

$$S_{Q_1} = \sqrt{\frac{0{,}17436}{15 - 1}} = 0{,}111599 \approx 0{,}112$$

$$S_{Q_2} = \sqrt{\frac{0{,}21389}{13 - 1}} = 0{,}133508 \approx 0{,}134$$

$$S_{Q_3} = \sqrt{\frac{0{,}61196}{12 - 1}} = 0{,}235867 \approx 0{,}236$$

СКО среднего арифметического находим по формуле:

$$S_{\bar{Q}} = \frac{S_Q}{\sqrt{n}}$$

где S_Q – СКО среднего арифметического серии;

S_Q – СКО серии;

n – число измерений в серии.

$$S_{\bar{Q}_1} = \frac{0{,}111599}{\sqrt{15}} = 0{,}028815 \approx 0{,}029$$

$$S_{\bar{Q}_2} = \frac{0{,}133508}{\sqrt{13}} = 0{,}037028 \approx 0{,}037$$

$$S_{\bar{Q}_3} = \frac{0{,}235867}{\sqrt{11}} = 0{,}071117 \approx 0{,}071$$

2. Проверка каждой серии измерений на грубые промахи

При незамеченном нарушении условий опыта или ошибки экспериментатора при снятии показаний с прибора и т.д. могут возникнуть грубые ошибки (промахи) или, как их еще называют, резко выделяющиеся наблюдения. Такие наблюдения следует исключить из результатов измерений. Отличить грубые промахи от случайных разбросов можно с помощью r-критерия:

$$r_{\max} = \frac{Q_{\max} - \bar{Q}}{S_Q}$$

$$r_{\min} = \frac{\bar{Q} - Q_{\min}}{S_Q}$$

Расчетные r_{max} и r_{min} сравниваются с табличным значением r-критерия. Результат опыта считается грубым промахом, если:

$$r_{max} > r_{таб} \text{ или } r_{min} > r_{таб}$$

Допускаемые значения r-критерия зависят от числа степеней свободы f и уровня значимости α = 1 - P. Число степеней свободы определяется как:

$$f = n - 2$$

$$f_1 = 15 - 2 = 13$$

$$f_2 = 13 - 2 = 11$$

$$f_3 = 11 - 2 = 9$$

Доверительная вероятность согласно задания:

$$P = 0{,}93$$

тогда уровень значимости для всех серий будет равен

$$\alpha = 1 - 0{,}93 = 0{,}07$$

$$r_{\max_1} = \frac{18{,}94 - 18{,}724}{0{,}112} = 1{,}929 < r_{таб} = 2{,}361$$

$$r_{\min_1} = \frac{18{,}724 - 18{,}55}{0{,}112} = 1{,}554 < r_{таб} = 2{,}361$$

$$r_{\max_2} = \frac{18{,}89\ -\ 18{,}709}{0{,}134} = 1{,}351 < r_{таб} = 2{,}306$$

$$r_{\min_2} = \frac{18{,}709\ -\ 18{,}42}{0{,}134} = 2{,}157 < r_{таб} = 2{,}306$$

$$r_{\max_3} = \frac{19{,}00\ -\ 18{,}698}{0{,}236} = 1{,}280 < r_{таб} = 2{,}181$$

$$r_{\min_3} = \frac{18{,}698\ -\ 18{,}23}{0{,}236} = 1{,}983 < r_{таб} = 2{,}181$$

Условия выполняются

значит в данной серии измерений грубых промахов нет

3.Проверка совпадения средних значений в сериях измерений

Для того чтобы можно было судить о совпадении средних значений в сериях должно выполняться условие:

$$\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right| \le \Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right|}$$

где $\Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right|}$ погрешность разности средних значений.

Данную проверку необходимо выполнить для всех возможных парных сочетаний серий измерений. Т.е. для наших трех серий проверяем следующие пары средних:

$$\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right| \qquad \left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_3\right| \qquad \left|\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3\right|$$

Учитывая нормальность распределения погрешности Δ, запишем ее значение в следующем виде:

$$\Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right|} = t \cdot \sqrt{\frac{S_{\bar{Q}_1}^2}{n_1} + \frac{S_{\bar{Q}_2}^2}{n_2}}$$

В формуле неизвестной осталась величина t – относительная ширина доверительного интервала. Эта величина определяется, исходя из доверительной вероятности, с которой делается данная проверка P = 0,93

Величина t выбирается из таблицы распределения Стьюдента.

Для этого также рассчитывают число степеней свободы по формуле:

$$f = n_1 + n_2 - 2$$

3.1. Проверяем первую пару средних: Q_1 и Q_2

$$\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right| = |\ 18{,}724\ -\ 18{,}709\ | = 0{,}015$$

$$f_1 = 15 + 13 - 2 = 26$$

Находим $t_1 =$ 1,916

Вычисляем погрешность разности средних

$$\Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right|} = 1{,}916 \cdot \sqrt{\frac{0{,}112^2}{15} + \frac{0{,}134^2}{13}} = 0{,}090$$

Проверяем условие

$$\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right| = 0{,}015 < \Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2\right|} = 0{,}090$$

Условие выполняется, делаем вывод о совпадении средних значений первой и второй серий

3.2. Проверяем вторую пару средних: Q_1 и Q_3

$$\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_3\right| = |\ 18{,}724\ -\ 18{,}698\ | = 0{,}026$$

$$f_2 = 15 + 11 - 2 = 24$$

Находим $t_2 =$ 1,923

Вычисляем погрешность разности средних

$$\Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_3\right|} = 1{,}923 \cdot \sqrt{\frac{0{,}112^2}{15} + \frac{0{,}236^2}{12}} = 0{,}138$$

Проверяем условие

$$\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_3\right| = 0{,}026 < \Delta_{\left|\bar{Q}_1 - \bar{Q}_3\right|} = 0{,}138$$

Условие выполняется, делаем вывод о совпадении средних значений первой и третьей серий

3.3. Проверяем третью пару средних: Q_2 и Q_3

$$\left|\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3\right| = |\ 18{,}709\ -\ 18{,}698\ | = 0{,}011$$

$$f_3 = 13 + 11 - 2 = 22$$

Находим $t_3 =$ 1,931

Вычисляем погрешность разности средних

$$\Delta_{\left|\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3\right|} = 1{,}931 \cdot \sqrt{\frac{0{,}134^2}{15} + \frac{0{,}236^2}{12}} = 0{,}143$$

Проверяем условие

$$\left|\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3\right| = 0,011 < \Delta_{\left|\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3\right|} = 0,143$$

Условие выполняется, делаем вывод о совпадении средних значений второй и третьей серий

4. Проверка равноточности серий измерений (проверка совпадения дисперсий)

Проверку совпадений дисперсий чаще всего проводят с использованием двух статистических критериев:

1. G-критерия Кохрэна;
2. F-критерия Фишера.

Необходимым условием для использования критерия Кохрэна является то, что число измерений во всех сериях должно быть одинаковым. Это условие не соблюдается, поэтому будем использовать критерий Фишера.

Проверка однородности дисперсий по критерию Фишера осуществляется следующим образом. Рассчитывается значение критерия Фишера по формуле:

$$F_P = \frac{S_{Q_1}^2}{S_{Q_2}^2}$$

при $S_{Q1} > S_{Q2}$. Т.к. значение критерия Фишера всегда больше 1, поэтому в числителе должна находиться наибольшая из двух сравниваемых дисперсий.

Как видно из формулы, критерий Фишера подразумевает попарное сравнение дисперсий. Поэтому, если серий больше двух, необходимо рассчитывать значение критерия Фишера для всех возможных парных сочетаний дисперсий.

Две дисперсии считаются однородными, если выполняется следующее условие:

$$F_P \leq F_{таб}$$

Критическое значение F-критерия выбирается по таблицам, исходя из значения доверительной вероятности P и чисел степеней свободы в сериях, которые определяются как:

$$f = n - 1$$

4.1. Сначала проверяем однородность наибольшей и наименьшей дисперсий

$$F_P = \frac{S_{Q_{\max}}^2}{S_{Q_{\min}}^2} = \frac{S_{Q_3}^2}{S_{Q_1}^2} = \frac{0{,}236^2}{0{,}112^2} = 4{,}44$$

Определяем число степеней свободы первой и третьей серий измерений

$$f_1 = n_1 - 1 = 15 - 1 = 14$$

$$f_3 = n_3 - 1 = 12 - 1 = 11$$

Из таблицы находим $F_{кр} =$ 3,2 $\qquad F_P = 4{,}44 < F_{таб} = 3{,}2$

Условие не соблюдается, значит, максимальные и минимальные дисперсии не совпадают между собой, значит, серии признаются не равноточными.

5. Обработка результатов неравноточных серий измерений

Неравноточные измерения вместе объединять нельзя, поэтому схема обработки результатов несколько иная.

Среднее значение из нескольких серии измерений определяется, как среднее взвеше

$$\overline{Q} = k_1 \cdot \overline{Q}_1 + k_2 \cdot \overline{Q}_2 + k_3 \cdot \overline{Q}_3$$

где $\overline{Q}$ - среднее взвешенное по результатам трех серий измерений,

$\overline{Q}_1$ $\overline{Q}_2$ $\overline{Q}_3$- средние арифметические в сериях измерений

k_1 k_2 k_3- весомые коэффициенты, характеризующие ценность результата

$$k_i = \frac{\dfrac{1}{S^2_{\overline{Q}_i}}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{S^2_{\overline{Q}_i}}}$$

Сумма всех коэффициентов равна 1

$$\sum_{i-1}^{m} k_i = 1$$

Для проверки правильности за счетом среднего взвешенного полезно использовать неравенство:

$$\overline{Q}_{j\min} < \overline{Q} < \overline{Q}_{j\max}$$

Оценка среднего квадратического

$$\overline{S}^2_{\overline{Q}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{S^2_{\overline{Q}_i}}}$$

Доверительный интервал записывается в обычной форме

$$\overline{Q} - t \cdot S_{\overline{Q}} \le Q \le \overline{Q} + t \cdot S_{\overline{Q}}$$

где t –ширина доверительного интервала

Если число прямых измерений невелико, то параметр t выбирают по таблице распределения Стьюдента в зависимости от прямого уровня доверительной вероятности Р и эффективного числа степеней свободы $k_{эфф}$

$$k_{эфф} = \frac{\dfrac{1}{(S_{\overline{Q}})^4}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \left(\dfrac{1}{n_j + 1} \dfrac{1}{\left(S_{\overline{Q}}\right)^4} \right)} - 2$$

Т. к числа степеней свободы k в таблицах, описывающих закон распределения Стьюдента, задаются целыми числами, приходится t определять, используя линейную интерполяцию, по одной из формул:

$$\frac{t - t_2}{k_2 - k_{эфф}} = \frac{t_1 - t_2}{k_2 - k_1}$$

k_1 и k_2 - числа степеней свободы, между которыми находятся значение $k_{эфф}$

Находим весовые коэффициенты

$$k_1 = \frac{\frac{1}{0{,}029^2}}{\frac{1}{0{,}029^2} + \frac{1}{0{,}037^2} + \frac{1}{0{,}071^2}} = \frac{1189{,}06}{1189{,}06 + 730{,}46 + 198{,}37} = 0{,}561$$

$$k_2 = \frac{\frac{1}{0{,}037^2}}{\frac{1}{0{,}029^2} + \frac{1}{0{,}037^2} + \frac{1}{0{,}071^2}} = \frac{730{,}46}{1189{,}06 + 730{,}46 + 198{,}37} = 0{,}345$$

$$k_3 = \frac{\frac{1}{0{,}071^2}}{\frac{1}{0{,}029^2} + \frac{1}{0{,}037^2} + \frac{1}{0{,}071^2}} = \frac{198{,}37}{1189{,}06 + 730{,}46 + 198{,}37} = 0{,}094$$

Проверяем сумму коэффициентов:

$$0{,}561 + 0{,}345 + 0{,}094 = 1{,}000 \quad \text{Решения верны}$$

Среднее взвешенное:

$$\overline{Q} = 0{,}561 \cdot 18{,}724 + 0{,}345 \cdot 18{,}709 + 0{,}094 \cdot 18{,}698 = 18{,}716$$

Имеем:

$$18{,}698 < 18{,}716 < 18{,}724$$

Оценка среднего квадратического отклонения

$$S_{\overline{Q}}^2 = \frac{1}{\frac{1}{0{,}029^2} + \frac{1}{0{,}037^2} + \frac{1}{0{,}071^2}} = \frac{1}{2117{,}894} \approx 0{,}00047$$

$$S_{\overline{Q}} = 0{,}022$$

Находим $k_{эфф}$

$$k_{эфф} = \frac{\dfrac{1}{(0{,}022)^4}}{\dfrac{1}{16(0{,}029)^4} + \dfrac{1}{14(0{,}037)^4} + \dfrac{1}{13(0{,}071)^4}} - 2 = 32{,}64$$

$k_1 < k_{эфф} < k_2$ т.е. $32 < 32{,}64 < 33$

При заданной доверительной вероятности по таблице распределения Стьюдента находим:

При $k_1 = 32$ $t_1 = 1{,}8997$

При $k_2 = 33$ $t_2 = 1{,}8977$

Определяем ширину доверительного интервала

$$\frac{t - 1{,}8977}{33 - 32{,}64} = \frac{1{,}8997 - 1{,}8977}{33 - 32}$$

Отсюда $t = 1{,}8984$

Записываем доверительный интервал в форме

$$18{,}716 - 1{,}8984 \cdot 0{,}022 < Q < 18{,}716 + 1{,}8984 \cdot 0{,}022$$

Окончательный результат:

$$18{,}68 < Q < 18{,}76$$