Задача 3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В таблице 1 приведены 100 независимых числовых значений результатов многократных измерений. Определить вид ВЗМ по критерию Пирсона. Записать результат с доверительной вероятностью Р=0,92.

Таблица 1

30,98	30,77	30,92	30,88	30,88	30,92	31,05	30,95	30,98	30,80	30,97	31,10	31,03	31,13
30,97	31,20	30,91	31,02	31,23	30,95	31,10	31,18	31,20	30,71	31,14	31,19	31,04	30,86
30,79	30,96	30,84	31,05	31,05	30,92	31,02	31,02	30,64	30,84	30,76	30,85	31,14	31,08
30,86	30,86	30,79	30,91	31,23	30,72	30,76	30,82	31,05	30,65	30,89	31,14	30,97	30,83
30,93	30,80	30,98	31,02	30,75	30,75	30,90	31,03	31,14	30,67	30,80	30,69	30,95	31,01
30,85	30,80	30,54	31,15	31,07	30,87	31,04	30,94	30,82	30,88	30,52	30,49	31,00	30,94
30,82	30,84	31,34	31,06	31,00	30,89	30,85	31,11	31,17	31,01	30,68	30,87	30,70	30,90
30,98	30,86												

1. Используя полученные данные, найдем значение среднего арифметического $\bar{U}$ и оценки среднего квадратического отклонения S_u:

$$\bar{U} = \frac{\sum_{1}^{n} U_i}{n} = \frac{3092{,}9}{100} = 30{,}9291 \qquad S_U = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(U_i - \bar{U})^2}{n-1}}$$

$\bar{U}$ = 30,9291 В $\qquad$ S_u= 0,16404 В

2. С помощью правила «трех сигм» проверим наличие грубых промахов:

$$U_{max}^{\text{доп.}} = \bar{U} + 3 \cdot S_U = 30{,}9291 + 3 \cdot 0{,}1640 = 31{,}4212 \text{ В}$$

$$U_{min}^{\text{доп.}} = \bar{U} - 3 \cdot S_U = 30{,}9291 - 3 \cdot 0{,}1640 = 30{,}4370 \text{ В}$$

Ни один из результатов не выходит за границы интервала $\left[U_{min}^{\text{доп}};\ U_{max}^{\text{доп}}\right]$, следовательно, с вероятностью 0,9973 принимается гипотеза об отсутствии грубых промахов.

3. Результаты отдельных измерений расположим в вариационный ряд по возрастанию их численных значений заносим в таблицу 2. Строим гистограмму (рисунок 1).Участок оси абсцисс, на котором располагается вариационный ряд значений физической величины, разбивается на k одинаковых ΔU.

Принимаем: $k=9$

Тогда:

$$\Delta U = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{k}$$

4. Полученное значение округляем до возможно меньшего числа значащих цифр для удобств последующих действий.

$$\Delta U = \frac{31{,}34 - 30{,}49}{9} = 0{,}094$$

Заполняем соответствующие ячейки таблицы 2.

Таблица 2

Расчет критерия χ^2 Пирсона

<table>
<tr><td rowspan="2">i</td><td colspan="2">интервалы</td><td colspan="2" rowspan="2">m_i</td><td rowspan="2">$\frac{m_i}{n\cdot\Delta U}=P$</td><td rowspan="2">$t_{i-1}$</td><td rowspan="2">$t_i$</td><td rowspan="2">$\Phi_{i-1}$</td><td rowspan="2">$\Phi_i$</td><td rowspan="2">$P_i$</td><td rowspan="2">$\chi_i^2=\frac{(m_i-nP_i)^2}{nP_i}$</td></tr>
<tr><td>U_{i-1}</td><td>U_i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>30,490</td><td>30,584</td><td>3</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">0,635</td><td rowspan="2">-2,677</td><td rowspan="2">-1,525</td><td rowspan="2">-0,496</td><td rowspan="2">-0,435</td><td rowspan="2">0,0610</td><td rowspan="2">0,00163934</td></tr>
<tr><td>2</td><td>30,584</td><td>30,679</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>30,679</td><td>30,773</td><td colspan="2">10</td><td>1,059</td><td>-1,525</td><td>-0,95</td><td>-0,435</td><td>-0,330</td><td>0,1050</td><td>0,02380952</td></tr>
<tr><td>4</td><td>30,773</td><td>30,868</td><td colspan="2">20</td><td>2,118</td><td>-0,950</td><td>-0,374</td><td>-0,330</td><td>-0,144</td><td>0,1860</td><td>0,10537634</td></tr>
<tr><td>5</td><td>30,868</td><td>30,962</td><td colspan="2">21</td><td>2,224</td><td>-0,374</td><td>0,202</td><td>-0,144</td><td>0,079</td><td>0,2230</td><td>0,07578475</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30,962</td><td>31,057</td><td colspan="2">23</td><td>2,435</td><td>0,202</td><td>0,778</td><td>0,079</td><td>0,279</td><td>0,2000</td><td>0,45000000</td></tr>
<tr><td>7</td><td>31,057</td><td>31,151</td><td colspan="2">12</td><td>1,271</td><td>0,778</td><td>1,353</td><td>0,279</td><td>0,411</td><td>0,1320</td><td>0,10909091</td></tr>
<tr><td>8</td><td>31,151</td><td>31,246</td><td>6</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">0,847</td><td rowspan="2">1,353</td><td rowspan="2">2,505</td><td rowspan="2">0,411</td><td rowspan="2">0,493</td><td rowspan="2">0,082</td><td rowspan="2">0,00487805</td></tr>
<tr><td>9</td><td>31,246</td><td>31,340</td><td>2</td></tr>
</table>

a. Поскольку конец предыдущего интервала является одновременно началом следующего, то теоретическая вероятность попадания результата определится по формуле: $P(U_1 \le U \le U_2) = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$

Началом первого интервала следует считать «–∞», а функции $\Phi(z_0)=\Phi(-\infty)=0$

b. По последнему столбцу рассчитаем значение χ^2 -критерия:

Суммарное значение $\chi^2 = 0{,}771$

Определим табличное (критическое) значение $\chi^2{}_T$, задавшись доверительной вероятностью 0,92 и вычислив по формуле r=k – 3 число степеней свободы:

r= 7 - 3 = 4

$\chi_T^2 = 9{,}4877$ $\chi^2 = 0{,}7706$ $\chi_T^2 > \chi^2$

Таким образом, с вероятностью 0,95 гипотеза о нормальности распределения вероятности результата измерения напряжения принимается.

5. Представление результата в виде доверительного интервала с доверительной вероятностью Р = 0,92

a. Определим стандартное отклонение среднего арифметического $\bar{U}$ по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 0{,}164 / 10 = 0{,}0164 \text{ В}$$

b. Исходя из того, что закон распределения вероятности результата измерения с вероятностью 0,95 соответствует нормальному, считаем, что, и закон распределения вероятности среднего арифметического тоже соответствует нормальному. Поэтому выбираем параметр t по таблице нормированного нормального распределения вероятности. Для доверительной вероятности Р=0,92 параметр аргумент функции Лапласа t= 1,7709

Тогда результат измерения запишется следующим образом:

$30{,}929 - 1{,}77 \cdot 0{,}016 \le U \le 30{,}929 + 1{,}77 \cdot 0{,}016$

или с вероятностью P=0,92

$30{,}90005$ В $\le$ U $\le$ $30{,}95815$ В

Учитывая то обстоятельство, что среднее квадратическое отклонение может быть оценено экспериментально с точностью до двух значащих цифр, округлим границы доверительного интервала до тысячных долей вольта. В итоге получим:

$30{,}900$ В $\le$ U $\le$ $30{,}958$ В

Если же есть основания полагать, что среднее арифметическое имеет неизвестное, отличное от нормального распределение вероятности, то относительную ширину доверительного интервала рассчитаем по формуле:

$$0{,}92 = 1 - \frac{1}{t^2}; \qquad t = 3{,}536$$

$30{,}93 - 3{,}536 \cdot 0{,}016 \le U \le 30{,}93 + 3{,}536 \cdot 0{,}016$

$30{,}87110$ В $\le U \le$ $30{,}98710$ В

или после округления:

$30{,}871$ В $\le U \le 30{,}987$ В

Строим гистограмму (рисунок 1).

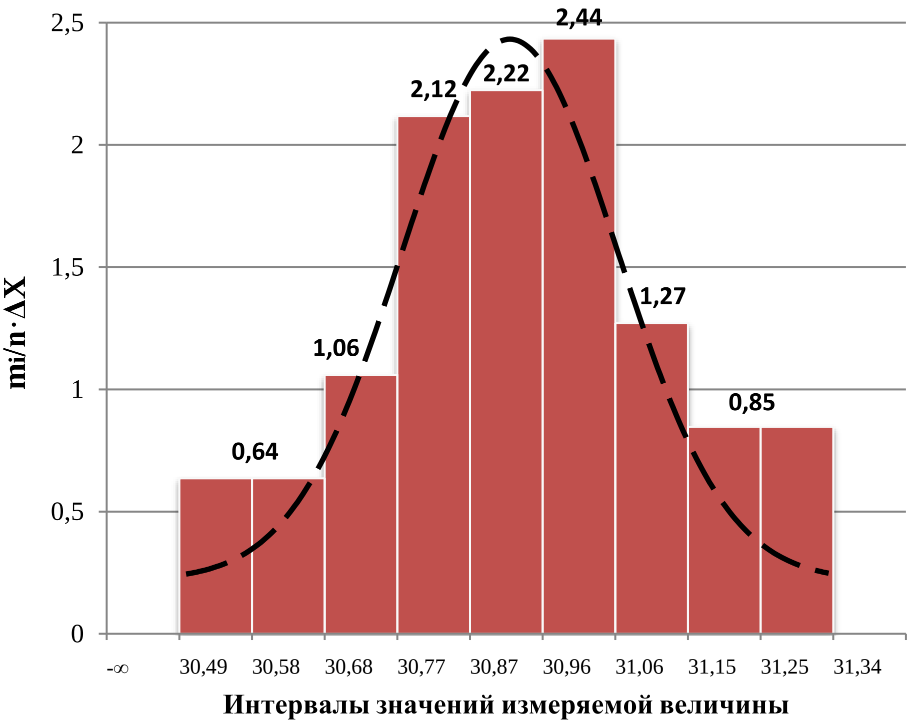

Рисунок 1. Гистограмма и выравнивающая нормальная кривая, иллюстрирующая гипотезу о виде ЗРВ

Список литературы:

1. Шишкин, И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством. Учебник для вузов/ Под ред. Н.С. Соломенко. - М.: Изд-во стандартов, 1990.- 342с.

2. Допуски и посадки. Справочник.: в 2 тт./ Под ред. В.Д. Мягкова. – Л.: Машиностроение, 1982. - 987 с.

3. Якушев, А.И., Воронцов, Л.Н., Федотов, Н.М. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения. – М.: Машиностроение, 1982.- 339с.