

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В таблице 1 приведены 500 независимых числовых значений результатов многократных измерений. Определить вид ВЗМ по критерию Пирсона. Записать результат с доверительной вероятностью $P=0,95$.

Таблица 1

25,68	25,85	25,71	25,94	25,88	25,85	25,73	25,86	25,84	25,84	25,83
25,65	25,74	25,64	25,65	25,77	25,87	25,71	25,50	25,97	25,99	26,02
25,68	25,65	25,91	25,64	25,96	25,99	25,84	25,54	25,76	25,77	25,71
25,83	25,90	25,85	25,80	25,71	25,66	25,79	25,64	25,78	25,67	25,89
26,02	25,91	25,81	25,72	25,82	25,84	25,73	26,00	25,97	25,71	25,65
25,91	25,87	25,82	25,67	25,69	26,03	25,79	25,99	25,85	25,99	25,95
25,62	25,72	25,77	25,84	25,63	25,49	25,74	25,75	25,83	25,61	25,77
25,60	25,77	25,72	25,71	26,19	25,81	25,85	25,98	25,91	25,86	26,10
25,82	25,98	25,75	26,00	25,82	25,65	25,76	25,99	25,89	25,80	25,80
25,56	25,87	25,85	25,60	25,95	26,09	25,78	25,70	25,80	25,92	25,83
25,74	25,93	25,62	25,94	25,83	25,83	25,95	25,77	25,82	25,80	25,85
25,71	25,85	25,80	25,70	26,01	25,88	25,93	25,94	25,82	25,69	25,81
25,49	25,89	25,79	25,94	25,66	25,74	25,93	25,78	25,86	25,64	25,68
25,95	25,65	25,79	25,74	25,94	25,84	25,89	25,63	25,72	25,92	25,87
25,52	25,53	25,90	25,74	25,87	25,96	25,94	26,03	25,92	25,94	25,84
25,57	25,88	26,03	25,65	25,65	25,62	25,70	25,82	25,75	25,67	25,93
25,74	25,77	25,76	25,94	26,15	25,99	25,80	25,48	25,96	25,91	25,95
25,78	25,67	25,57	25,96	25,69	25,97	25,61	26,04	25,81	25,75	26,01
25,80	25,67	25,74	26,08	25,98	25,72	25,88	25,62	25,94	25,75	25,70
25,75	25,85	25,55	25,99	25,97	25,85	25,92	25,66	25,86	25,84	25,86
25,93	25,94	25,80	25,68	25,84	25,97	25,84	25,59	25,86	25,69	25,78
25,73	25,72	25,51	25,98	25,86	25,99	25,97	25,87	25,86	25,90	25,90
25,95	25,64	25,59	25,69	25,72	25,81	25,78	25,87	25,69	25,93	25,67
25,60	25,92	25,83	25,79	25,73	25,70	25,71	25,71	25,62	25,78	25,80
25,69	25,93	25,70	25,72	25,82	25,68	25,99	25,70	25,86	25,66	25,58
25,80	25,88	25,72	25,93	25,86	25,87	25,82	25,88	25,72	25,79	25,69
25,70	25,57	25,89	25,75	25,97	25,49	25,93	25,95	26,02	25,76	25,88
25,94	25,94	25,73	25,74	25,77	25,66	25,71	25,67	25,62	25,55	25,90
25,82	25,82	25,87	25,94	25,44	25,44	26,05	25,96	26,11	25,95	26,06
25,79	25,96	25,90	25,64	25,78	25,78	25,86	25,74	25,90	25,95	25,71
25,80	25,77	25,83	25,82	25,68	25,91	25,99	26,08	26,06	25,55	25,64
25,86	25,90	25,67	25,86	25,74	25,62	25,67	25,89	25,69	25,69	26,06
25,67	25,65	25,62	25,92	25,90	25,92	25,74	25,55	25,99	25,95	25,65
26,01	25,76	25,86	25,86	25,77	25,63	25,79	25,81	25,89	25,70	25,71
25,82	25,88	25,79	25,47	25,91	25,87	25,61	25,64	25,95	25,57	25,65
25,85	25,73	25,90	25,69	25,73	25,69	25,85	25,81	25,84	25,58	25,75
25,76	25,76	25,72	25,71	25,80	25,89	25,74	25,81	25,68	25,67	25,88
26,05	25,90	25,77	25,49	25,86	26,08	25,82	25,79	25,59	26,00	25,68
25,77	26,17	25,64	25,88	25,80	25,82	25,91	25,53	25,81	25,85	25,77
25,96	25,92	25,61	26,04	25,69	25,78	26,02	25,81	25,76	25,58	26,04
25,71	25,81	25,83	25,94	25,84	25,95	25,73	26,01	25,69	25,57	25,83

Продолжение таблицы 1

25,78	25,71	25,53	25,75	25,77	25,97	25,89	25,73	25,64	25,61	25,50
25,84	25,92	26,00	25,78	25,74	26,14	25,74	25,85	25,73	25,74	25,72
25,90	25,91	25,72	25,81	25,91	25,86	26,00	25,92	26,10	25,58	25,84
25,85	25,69	25,77	25,85	25,78	25,96	25,84	25,96	25,92	25,79	25,98
25,66	25,79	25,75	25,57	25,60						

1. Используя полученные данные, найдем значение среднего арифметического \bar{U} и оценки среднего квадратического отклонения S_u :

$$\bar{U} = \frac{\sum_1^n U_i}{n} = \frac{12901,3}{500} = 25,8026 \quad S_u = \sqrt{\frac{\sum_1^n (U_i - \bar{U})^2}{n - 1}}$$

$$\bar{U} = 25,8026 \text{ В} \quad S_u = 0,13781 \text{ В}$$

2. С помощью правила «трех сигм» проверим наличие грубых промахов:

$$U_{max}^{доп.} = \bar{U} + 3 \cdot S_U = 25,8026 + 3 \cdot 0,1378 = 26,2160 \text{ В}$$

$$U_{min}^{доп.} = \bar{U} - 3 \cdot S_U = 25,8026 - 3 \cdot 0,1378 = 25,3891 \text{ В}$$

Ни один из результатов не выходит за границы интервала $[U_{min}^{доп.}; U_{max}^{доп.}]$, следовательно, с вероятностью 0,9973 принимается гипотеза об отсутствии грубых промахов.

3. Результаты отдельных измерений расположим в вариационный ряд по возрастанию их численных значений заносим в таблицу 2. Строим гистограмму (рисунок 1). Участок оси абсцисс, на котором располагается вариационный ряд значений физической величины, разбивается на k одинаковых ΔU .

Принимаем: $k = 10$

Тогда:

$$\Delta U = \frac{U_{max} - U_{min}}{k}$$

4. Полученное значение округляем до возможно меньшего числа значащих цифр для удобств последующих действий.

$$\Delta U = \frac{26,19 - 25,44}{10} = 0,075$$

Заполняем соответствующие ячейки таблицы 2.

Расчет критерия χ^2 Пирсона

i	интервалы		m _i	$\frac{m_i}{n \cdot \Delta U} = P$	t _{i-1}	t _i	Φ _{i-1}	Φ _i	P _i	$\chi_i^2 = \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}$
	U _{i-1}	U _i								
1	25,440	25,515	11	0,293	-2,631	-2,087	-0,495	-0,481	0,0140	2,28571429
2	25,515	25,590	23	0,613	-2,087	-1,542	-0,481	-0,438	0,0430	0,10465116
3	25,590	25,665	47	1,253	-1,542	-0,998	-0,438	-0,339	0,0990	0,12626263
4	25,665	25,740	97	2,587	-0,998	-0,454	-0,339	-0,173	0,1660	2,36144578
5	25,740	25,815	84	2,240	-0,454	0,090	-0,173	0,035	0,2080	3,84615385
6	25,815	25,890	102	2,720	0,090	0,635	0,035	0,235	0,2000	0,04000000
7	25,890	25,965	77	2,053	0,635	1,179	0,235	0,381	0,1460	0,21917808
8	25,965	26,040	43	1,147	1,179	1,723	0,381	0,457	0,0760	0,65789474
9	26,040	26,115	12	0,427	1,723	2,812	0,457	0,497	0,0400	0,80000000
10	26,115	26,190	4							

а. Поскольку конец предыдущего интервала является одновременно началом следующего, то теоретическая вероятность попадания результата определится по формуле:

$$P(U_1 \leq U \leq U_2) = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$$

Началом первого интервала следует считать « $-\infty$ », а функции $\Phi(z_0) = \Phi(-\infty) = 0$

б. По последнему столбцу рассчитаем значение χ^2 -критерия:

Суммарное значение $\chi^2 = 10,441$

Определим табличное (критическое) значение χ^2_{τ} , задавшись доверительной вероятностью 0,95 и вычислив по формуле $r = k - 3$ число степеней свободы:

$$r = 9 - 3 = 6$$

$$\chi^2_{\tau} = 12,5916$$

$$\chi^2 = 10,441 \quad \chi^2_{\tau} > \chi^2$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 гипотеза о нормальности распределения вероятности результата измерения напряжения принимается.

5. Представление результата в виде доверительного интервала с доверительной вероятностью $P = 0,95$

а. Определим стандартное отклонение среднего арифметического \bar{U} по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 0,138 / 22 = 0,0062 \text{ В}$$

б. Исходя из того, что закон распределения вероятности результата измерения с вероятностью 0,95 соответствует нормальному, считаем, что, и закон распределения вероятности среднего арифметического тоже соответствует нормальному. Поэтому выбираем параметр t по таблице нормированного нормального распределения вероятности. Для доверительной вероятности $P=0,95$ параметр

аргумент функции Лапласа $t = 1,96$

Тогда результат измерения запишется следующим образом:

$$25,803 - 1,96 \cdot 0,006 \leq U \leq 25,803 + 1,96 \cdot 0,006$$

или с вероятностью $P=0,95$

$$25,79048 \text{ В} \leq U \leq 25,81464 \text{ В}$$

Учитывая то обстоятельство, что среднее квадратическое отклонение может быть оценено экспериментально с точностью до двух значащих цифр, округлим границы доверительного интервала до тысячных долей вольта. В итоге получим:

$$25,790 \text{ В} \leq U \leq 25,815 \text{ В}$$

Если же есть основания полагать, что среднее арифметическое имеет неизвестное, отличное от нормального распределение вероятности, то относительную ширину доверительного интервала рассчитаем по формуле:

$$0,95 = 1 - \frac{1}{t^2}; \quad t = 4,472$$

$$25,80 - 4,472 \cdot 0,006 \leq U \leq 25,80 + 4,472 \cdot 0,006$$

$$25,77500 \text{ В} \leq U \leq 25,83012 \text{ В}$$

или после округления:

$$25,775 \text{ В} \leq U \leq 25,830 \text{ В}$$

Строим гистограмму (рисунок 1).

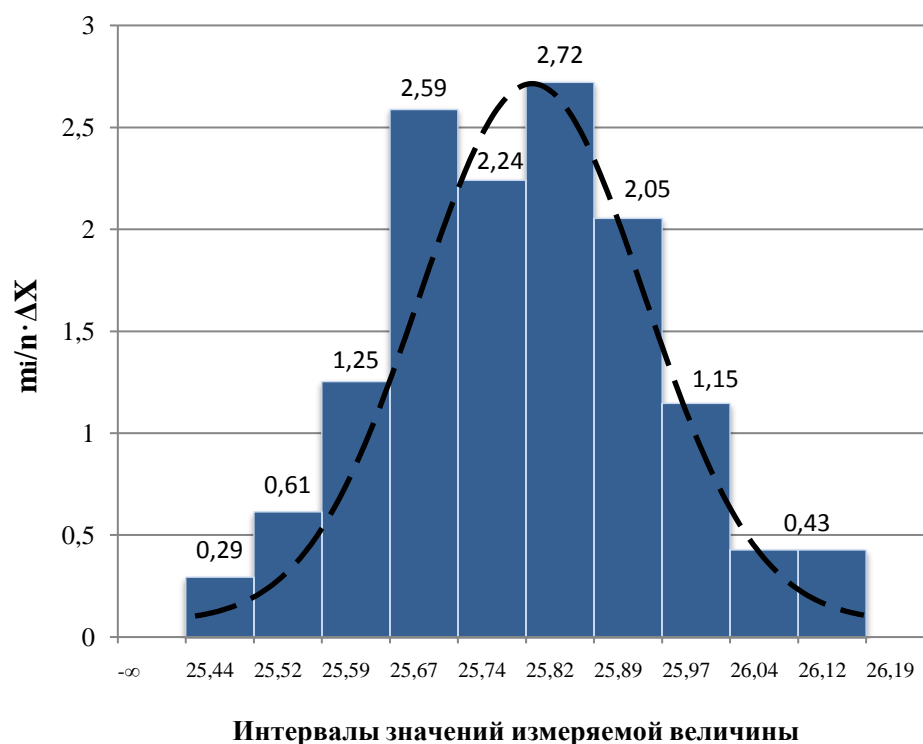


Рисунок 1. Гистограмма и выравнивающая нормальная кривая, иллюстрирующая гипотезу о виде ЗРВ

Список литературы:

1. Шишкин, И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством. Учебник для вузов/ Под ред. Н.С. Соломенко. - М.: Изд-во стандартов, 1990.- 342с.
2. Допуски и посадки. Справочник.: в 2 тт./ Под ред. В.Д. Мягкова. – Л.: Машиностроение, 1982. - 987 с.
3. Якушев, А.И., Воронцов, Л.Н., Федотов, Н.М. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения. – М.: Машиностроение, 1982.- 339с.