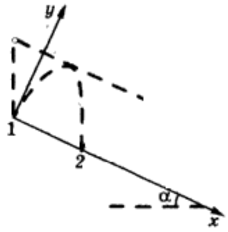
**Задача 1**
Шарик с высоты h=2м вертикально падает на наклонную плоскость и упруго отражается. На каком расстоянии от места падения он снова ударится о ту же плоскость? Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30^0$.




Дано:

$h = 2м$

$\alpha = 30^0$

$l - ?$

К моменту первого удара скорость мяча $v_1 = \sqrt{2gh}$

Разместим оси координат как показана на рисунке

При каждом ударе $v_x$ не изменяется, а $v_y$ меняет знак

Поэтому к моменту следующего удара

$$v_y = v_{1y} = \sqrt{2gh}\cos\alpha$$

Время полета после каждого отскока

$$\tau = \frac{2v_{1y}}{g\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Координата второго соударения

$$x_2 = \frac{g_x t^2}{2} = \frac{g\cdot\sin\alpha\cdot 4\cdot 2h}{g} = 8h\sin\alpha$$

Тогда расстояние между ударами о плоскость

$$l = x_2 - x_1 = 8h\sin\alpha = 8\cdot 2\cdot\sin 30 = 8м$$

**Задача 2**
Диск радиусом R=40см приводится во вращение с помощью намотанной на него веревки. Конец веревки тянут с ускорением $a_0$=0,5м/с$^2$. Во сколько раз полное ускорение точек на ободе диска меньше ускорения точек, лежащих на 15см ближе к оси диске через 6 секунд после начала движения.

Дано:

$R = 40см = 0,4м$

$a_0 = 0,5м/с^2$

$\Delta R = 15см = 0,15м$

$t = 6с$

$\frac{a_2}{a_1} - ?$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (1)$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \varepsilon r \quad (2)$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R} \quad (3)$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (4)$$

Угловая скорость

$$\omega = \varepsilon t \quad (5)$$

Подставим (2) и (4) с учетом (3) и (5) в (1), получим:

$$a=\sqrt{\left(\frac{a_0 r}{R}\right)^2+\left(\left(\frac{a_0}{R}t\right)^2 r\right)^2}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\sqrt{\left(\frac{a_0 R}{R}\right)^2+\left(\left(\frac{a_0}{R}t\right)^2 R\right)^2}=a_0\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t^2}{R}\right)^2}\\ a_2=\sqrt{\left(\frac{a_0 r}{R}\right)^2+\left(\left(\frac{a_0}{R}t\right)^2 r\right)^2}=\frac{a_0\left(R-\Delta R\right)}{R}\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t^2}{R}\right)^2}\end{cases}$$

Отношение ускорений

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{a_0\left(R-\Delta R\right)}{R}\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t^2}{R}\right)^2}}{a_0\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t^2}{R}\right)^2}}=\frac{R-\Delta R}{R}=\frac{0,4-0,15}{0,4}=0,625$$

**Задача 3**

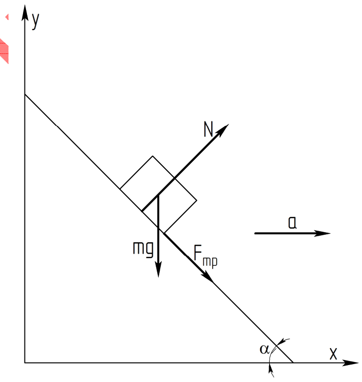
Наклонная плоскость с углом наклона α=45$^0$ движется с ускорением $a$ в сторону, указанную стрелкой. Начиная с какого значения $a$ тело, лежащее на наклонной плоскости, начнет подниматься? Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен μ=0,6.

Дано:

$\alpha=45^0$

$\mu=0,6$

$a-?$




По второму закону Ньютона в проекциях на оси координат

$$\begin{cases}y: \quad N\cos\alpha-F_{тр}\sin\alpha-mg=0\\ x: \quad N\sin\alpha-F_{тр}\cos\alpha=ma\end{cases}\qquad(1)$$

Сила трения

$$F_{тр}=\mu N$$

Из (1) с учетом (2), получим:

$$\begin{cases}N=\dfrac{mg}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\\ a=\dfrac{N\left(\sin\alpha+\mu\cos\alpha\right)}{m}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{g\left(\sin\alpha+\mu\cos\alpha\right)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}=\frac{g\left(\operatorname{tg}\alpha+\mu\right)}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}=\frac{9,8\cdot\left(\operatorname{tg}45+0,6\right)}{1-0,6\cdot\operatorname{tg}45}=$$

$$=39,2м/с^2$$

**Задача 4**

Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки горизонтально равна 100м/с. Снаряд разорвался на два равных осколка, которые разлетелись под прямым углом. Один из осколков полетел под углом α=60$^0$ к первоначальному направлению движения ракеты. Определите величину скорости этого осколка.

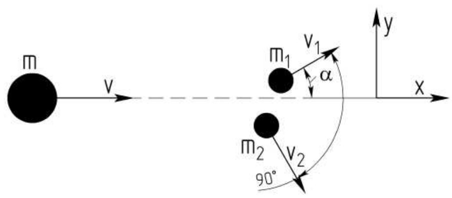
Дано:

$v=100м/с$

$m_1=m_2=0,5m$

$\alpha=60^0$

$v_1-?$




Согласно закона сохранения импульса в проекциях на оси координат

$$x:\ mv = m_1v_1\cos\alpha + m_2v_2\cos(90-\alpha) \Rightarrow 2v = v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha \quad (1)$$

$$y:\ 0 = m_1v_1\sin\alpha - m_2v_2\sin(90-\alpha) \Rightarrow v_2 = \frac{v_1\sin\alpha}{\cos\alpha} = v_1\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$2v = v_1\cos\alpha + v_1\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha \Rightarrow v_1 = \frac{2v}{\cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha} = \frac{2\cdot 100}{\cos 60 + \mathrm{tg}\,60\cdot\sin 60} = 100\,м/с$$

**Задача 5**

Шар массой 1кг, подвешенный на нити длиной 90см, отводят от положения равновесия на угол $60^0$ и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10г, летящая навстречу шару со скоростью 300м/с. Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200м/с, после чего шар, продолжая движение в прежнем направлении. На какой максимальный угол отклонится шар после попадания в него пули? Массу шара считать неизменной.

Дано:

$M = 1кг$

$l = 90см = 0{,}9м$

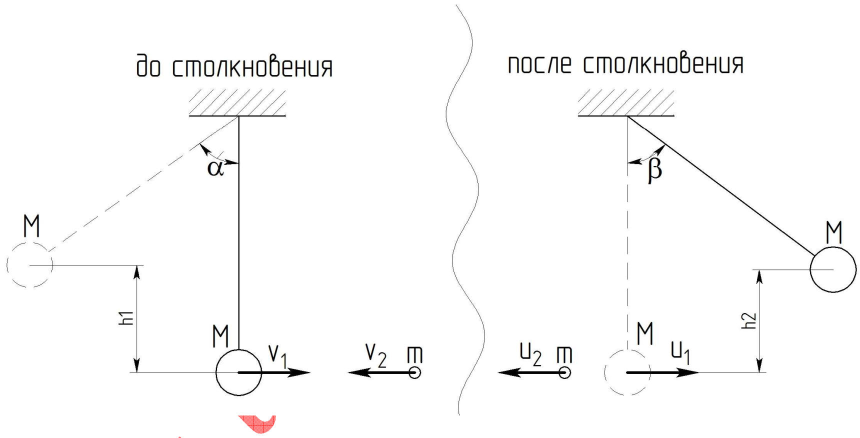
$\alpha = 60^0$

$m = 10г = 0{,}01кг$

$v_2 = 300м/с$

$u_2 = 200м/с$

$\beta - ?$




По закону сохранения энергии (шар отклонили на угол α)

$$Mgh_1 = \frac{Mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (1)$$

Из рисунка видно, что шар подняли на высоту

$$h_1 = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) \quad (2)$$

По закону сохранения импульса (в момент столкновения с пулей)

$$Mv_1 - mv_2 = Mu_1 - mu_2 \Rightarrow u_1 = \frac{Mv_1 - m(v_2-u_2)}{M} \quad (3)$$

По закону сохранения энергии (после столкновения с пулей)

$$\frac{Mu_1^2}{2} = Mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{u_1^2}{2g} \quad (4)$$

Из рисунка видно, что шар поднимется на высоту

$$h_2 = l - l\cos\beta \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{l-h_2}{l}\right) \quad (5)$$

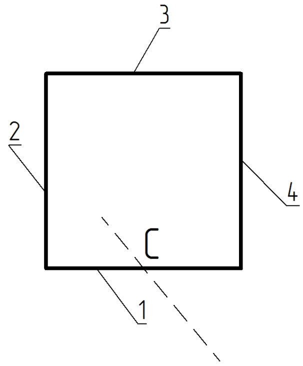
Подставим (4) с учетом (1) – (3), получим:

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{\left(\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} - \frac{m(v_2-u_2)}{M}\right)^2}{2gl}\right) =$$

$$= \arccos\left(1 - \frac{\left(\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}9\cdot(1-\cos 60)} - \frac{0{,}01\cdot(300-200)}{1}\right)^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}9}\right) = 38{,}74^0$$

**Задача 6**

Деталь в виде квадрата сварили из четырех одинаковых однородных тонких стержней массы m=500г и длины l=1м каждый. Ось С проходит перпендикулярно плоскости детали через центр одной из сторон квадрата. Найти момент инерции детали относительно этой оси.




Дано:

$m = 500г = 0{,}5кг$

$l = 1м$

$I - ?$

По теореме Штейнера

$I = I_0 + ma^2$

Момент инерции стержня относительно центра масс

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Момент инерции стержня относительно центра масс

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

Момент инерции

- Стержня 1 относительно оси вращения

$$I_1 = \frac{ml^2}{12}$$

- Стержня 2 и 4 относительно оси вращения

$$I_2 = I_4 = \frac{ml^2}{3} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{7ml^2}{12}$$

- Стержня 3 относительно оси вращения

$$I_3 = \frac{ml^2}{12} + ml^2 = \frac{13ml^2}{12}$$

Момент инерции детали

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{ml^2}{12} + \frac{7ml^2}{12} + \frac{13ml^2}{12} + \frac{7ml^2}{12} = \frac{7ml^2}{3} = \frac{7\cdot 0{,}5\cdot 1^2}{3} = 1{,}17кг\cdot м^2$$

**Задача 7**

В край однородного диска с массой М=40г, который может вращаться без трения вокруг закрепленной вертикальной оси симметрии, врезается летевшая горизонтально по касательной к диску пуля массой m=20г и застревает в нем. С какой скоростью летела пуля, если первоначально диск был неподвижен, а после удара кинетическая энергия всей системы стала равной 8Дж?

Дано:

$M = 40г = 0{,}04кг$

$m = 20г = 0{,}02кг$

$T = 8Дж$

$v - ?$

По закону сохранения момента импульса

$$mvR = I\omega \Rightarrow v = \frac{I\omega}{mR} \quad (1)$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2T}{I}} \quad (2)$$

По теореме Штейнера для системы диск – пуля

$$I = \frac{MR^2}{2} + mR^2 = \frac{(M+2m)R^2}{2} \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1), получим:

$$v = \frac{\sqrt{(M+2m)T}}{m} v = \frac{\sqrt{(0{,}04+2\cdot 0{,}02)\cdot 8}}{0{,}02} = 40\,м/с$$

**Задача 8**

Два невесомых стержня длины b соединены под углом $\alpha_1=30^0$ и вращаются без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси O с угловой скоростью $\omega_1$=6рад/с. На конце одного из стержней прикреплен очень маленький массивный шарик. В некоторый момент угол между стержнями самопроизвольно увеличился до $\alpha_2=60^0$. С какой угловой скоростью стала вращаться такая система?

Дано:

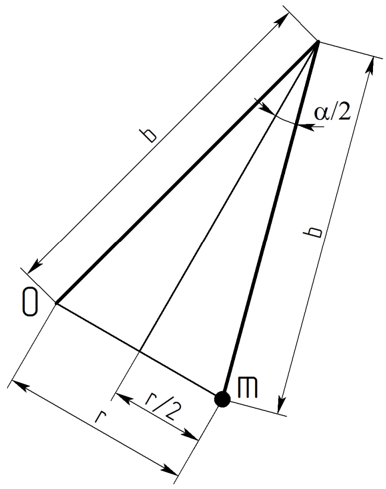
$b$

$\alpha_1 = 30^0$

$\omega_1 = 6\,рад/с$

$\alpha_2 = 60^0$

$\omega_2 - ?$




По закону сохранения момента импульса

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} \quad (2)$$

Момент инерции

$$I = mr^2 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = m\left(2b\sin\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 = 4mb^2\sin^2\frac{\alpha_1}{2} \\ I_2 = m\left(2b\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 = 4mb^2\sin^2\frac{\alpha_2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$\omega_2 = \frac{\sin^2\frac{\alpha_1}{2}\omega_1}{\sin^2\frac{\alpha_2}{2}} = \frac{\sin^2\frac{30}{2}\cdot 6}{\sin^2\frac{60}{2}} = 1{,}61\,рад/с$$

**Задача 9**

К пружине подвесили грузик и система стала совершать колебания с периодом $T_1$=0,6с. После того, как к пружине подвесили еще один добавочный груз система стала совершать колебания с периодом $T_2$=0,8с. На сколько удлинилась пружина от прибавления добавочного груза?

Дано:

$T_1 = 0{,}6с$

$T_2 = 0{,}8с$

$\Delta x - ?$

По закону Гука

$$F = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{m_2 g}{k} \quad (1)$$

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{k}} \end{cases} \Rightarrow T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2 m_2}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m_2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$\Delta x = \frac{g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{4\pi^2} = \frac{9{,}8\cdot\left(0{,}8^2 - 0{,}6^2\right)}{4\cdot 3{,}14^2} = 0{,}07\textit{м} = 7\textit{см}$$

**Задача 10**

Идеальный одноатомный газ с массой m=40г, первоначально имевший температуру $T_1$=400К, сначала изобарно нагрели до вдвое большей температуры, а затем изохорно охладили до первоначальной температуры. В результате этих процессов газ получил тепло ΔQ=4155Дж. Какова молярная масса этого газа?

Дано:

$i = 3$

$m = 40\textit{г} = 0{,}04\textit{кг}$

$T_1 = 400K$

$T_2 = 2T_1$

$T_3 = T_1$

$Q = 4155\textit{Дж}$

$M - ?$

По первому началу термодинамики

$Q = A + \Delta U$

**Рассмотрим каждый процесс в отдельности**

Изобарный процесс

$Q_1 = A_1 + \Delta U_1$

Работа

$$A_1 = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right)$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right)$$

Изохорный процесс

$V = \text{const} \Rightarrow A = 0$

$Q_2 = \Delta U_2$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_2 = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_3 - T_2\right)$$

Общее количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) + \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_3 - T_2\right) \Rightarrow M = \frac{mR\left(T_2 - T_1\right)}{Q} =$$

$$= \frac{0{,}04\cdot 8{,}31\cdot(800-400)}{4155} = 0{,}032\textit{кг}/\textit{моль}$$

**Задача 11**

Энтропия некоторой термодинамической системы изменяется с температурой по закону S=bt$^4$+const, где b=10$^{-5}$Дж/К$^5$. Определите теплоемкость этой системы при температуреT=300К.

Дано:

$S = bT^4 + \text{const}$

$b = 10^{-5}\,Дж/К^5$

$T = 300К$

$C - ?$

Изменение количество теплоты

$$dQ = CdT \Rightarrow C = \frac{dQ}{dT} \quad (1)$$

Изменение энтропии

$$dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow dQ = TdS \quad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим:

$$C = \frac{TdS}{dT} = \frac{Td\left(bT^4 + \text{const}\right)}{dT} = 4bT^4 = 4\cdot 10^{-5}\cdot 300 = 12\cdot 10^{-3}\,Дж/К = 12\,мДж/К$$

**Задача 12**

Идеальный газ совершает цикл Карно, причем за все время цикла максимальная наиболее вероятная скорость молекул газа оказывается равной минимальной средней квадратичной скорости молекул газа за время этого цикла. Найти кпд цикла.

Дано:

$v_в^{\max} = v_{кв}^{\min}$

$\eta - ?$

КПД цикла

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (1)$$

Наиболее вероятная скорость

$$v_в^{\max} = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}} \Rightarrow T_1 = \frac{M\left(v_в^{\max}\right)^2}{2R} \quad (2)$$

Средняя квадратичная скорость

$$v_{кв}^{\min} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} \Rightarrow T_2 = \frac{M\left(v_{кв}^{\min}\right)^2}{3R} \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1), получим:

$$\eta = \frac{\frac{\left(v_в^{\max}\right)^2}{2} - \frac{\left(v_{кв}^{\min}\right)^2}{3}}{\frac{\left(v_в^{\max}\right)^2}{2}} = 1 - \frac{2\left(v_{кв}^{\min}\right)^2}{3\left(v_в^{\max}\right)^2} = 1 - \frac{2}{3} = 0,33$$