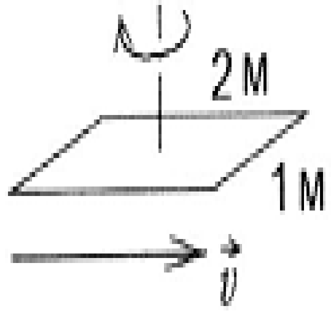

Рис. 1: К задаче 1.

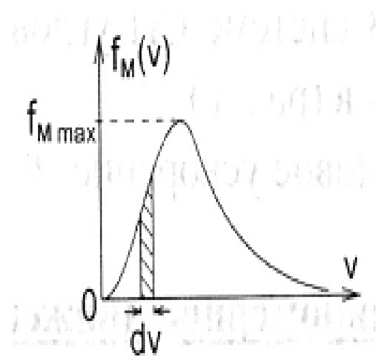

Рис. 2: К задаче 2.

Вариант №6

6.1 Космический корабль с космонавтом X летит со скоростью $v = 0.8\,c$ (c – скорость света в вакууме) мимо наблюдателя Y на неподвижной планете. Наблюдатель Y поворачивает прямоугольник размером 2 м×1 м из положения “1”, при котором его длинная сторона параллельна направлению движения корабля корабля, в положение “2”, при котором его короткая сторона параллельна направлению движения корабля. Тогда площадь прямоугольника с точки зрения космонавта X:

а) увеличится в $1,67$ раз;
б) уменьшится в $1,67$ раз;
в) равна 2 м^2 при любой ориентации прямоугольника;
г) равна $1,2$ м^2 при любой ориентации прямоугольника.

Решение.

При движении тела его продолные размеры сокращаются; формула, определяющая изменение продольных размеров, имеет вид

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

При этом поперечные размеры тела не меняются. Следовательно, площадь продольного сечения движущегося тела S выражается через площадь продольного сечения этого же тела в состоянии покоя формулой

$$S = S_0 \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

т.е. площадь S уменьшается в

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

раз независимо от ориентации тела.

В данном случае

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - 0.8^2} = 1.66667.$$

Правильный ответ:
б) уменьшится в 1.67 раз.

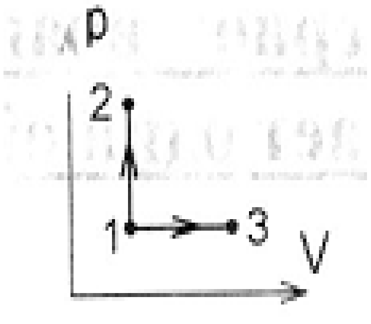

Рис. 3: К задаче 3.

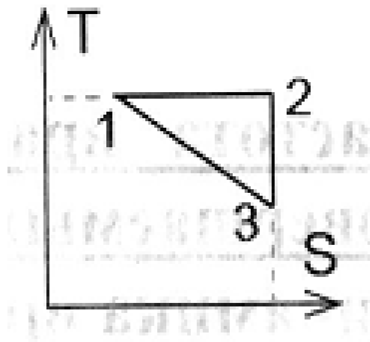

Рис. 4: К задаче 4.

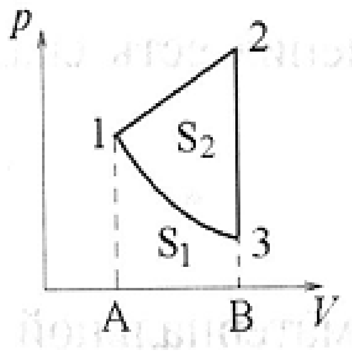

Рис. 5: К задаче 5.

6.2 На рисунке представлен график распределения молекул идеального газа по величинам скоростей (распределение Максвелла), где $f_M(v) = dN/(N\,dv)$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервал скоростей от v до $v + dv$ в расчете на единицу этого интервала. При уменьшении температуры газа максимальное значение $f_{M\,max}$ этого графика:

а) стремится к бесконечности;
б) увеличивается;
в) не изменяется;
г) уменьшается.

Решение.

Функция распределения Максвелла принимает максимальное значение при

$$v = v_m = \sqrt{2\,k_B T/M},$$

где M – масса каждой молекулы.

Величина v_m является возрастающей функцией T.

Правильный ответ:
г) уменьшается.

6.3 Молярные теплоемкости кислорода в процессах $1 \to 2$ и $1 \to 3$ равны C_1 и C_2 соответственно. Их отношение C_2/C_1 равно:
а) 3/5; б) 5/3; в) 5/7; г) 7/5.

Решение.

Величины C_1 и C_2 представляют собой молярные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении соответственно:

$$C_1 = C_v^{\mathrm{mol}}; \qquad C_2 = C_p^{\mathrm{mol}}.$$

Если использовать классические формулы, и считать молекулу жесткой, то теплоемкости равны

$$C_v^{\mathrm{mol}} = R\,j/2; \qquad C_p^{\mathrm{mol}} = R\,(j/2 + 1),$$

где $j = 3 + j^{\mathrm{rotat}}$ – число степеней свободы молекулы; j^{rotat} – число вращательных степеней свободы молекулы; для двухатомных молекул, какими являются молекулы кислорода, $j^{\mathrm{rotat}} = 2$ и $j = 5$, значит,

$$C_1 = C_v^{\mathrm{mol}} = R\,5/2; \qquad C_2 = C_p^{\mathrm{mol}} = R\,7/2$$

и

$$C_2/C_1 = 7/5.$$

Правильный ответ:
г) 7/5.

6.4 На рисунке представлен прямой цикл тепловой машины в координатах $T - S$, T – термодинамическая температура, S – энтропия. Укажите участки, на которых тепло поступает в рабочее тело машины от нагревателей, и участки, где тепло отдается холодильнику:

а) 12, 31 – поступает; 23 – отдается;
б) 12 – поступает; 23, 31 – отдается;
в) 12 – поступает; 31 – отдается;
г) 31 – поступает; 23 – отдается.

Решение.

Количество теплоты, получаемое рабочим телом, может быть представлено в виде

$$Q = \int T\,dS.$$

Следовательно, на тех участках, на которых S увеличивается, тепло поступает в рабочее тело; там где S уменьшается, тепло отдается, а там где $S = \mathrm{const}$ тепло не поступает и не отдается.

Правильный ответ:
в) 12 – поступает; 31 – отдается.

6.5 Идеальный газ совершает циклический процесс $1 - 2 - 3 - 1$, как показано на рисунке, где процессы $2 - 3$ – изохорический, а $3 - 1$ – изотермический. Площадь S_2 фигуры $1 - 2 - 3$ равна 10 Дж. На участке $1 - 2$ газ совершил работу 15 Дж.

Площадь фигуры $1 - 3 - B - A$ равна ...

а) 15 Дж; б) 10 Дж; в) 5 Дж; г) 25 Дж.

Решение.

Работа, совершаемая газом, может быть представлена в виде

$$A = \int P\,dV.$$

Эта величина равна площади фигуры, ограниченной кривой на PV-диаграмме, осью абсцисс и вертикальными прямыми, проходящими через начальную и конечную точки. В данном случае $A = S_1 + S_2$ и искомая величина

$$S_1 = A - S_2 = 15 - 10 = 5\,\mathrm{J}.$$

Правильный ответ:
в) 5 Дж.

6.6 Небольшое тело на пружине начало движение из положения равновесия по закону $x = A\,\sin(\omega t)$. Какой путь пройдет это тело от начала движения за время $t = \frac{3T}{8}$, где T – период колебаний?

а) $\frac{\sqrt{2}\,A}{2}$; б) $A\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $A\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение.

Координата движущейся точки в момент $t = 3T/8$ равна

$$x_t = A\,\sin(2\pi \cdot 3/8) = A\,\sqrt{2}/2.$$

С момента начала движения, за время $T/4$ точка проходит путь $s_1 = A$; за оставшееся время $T/8$ она проходит путь $s_2 = A - x_t$. Значит весь пройденный точкой путь равен

$$s = 2A - x_t = A\,(2 - \sqrt{2}/2).$$

Правильный ответ:
б) $A\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.7 Тепловые машины и циклические процессы. К.п.д. цикла. Цикл Карно и вывод его к.п.д. Примеры тепловых машин (холодильник, кондиционер, тепловой насос).

Ответы.

Круговым термодинамичеким процессом называется такой процесс, происходящий в некоторой термодинамической системе, при котором каждая термодинамическая характеристика данной системы является периодической функцией времени. Это значит, что за промежуток времени, имеющий некоторую продолжительность T, система возвращается в начальное состояние. При этом говорят, что система совершила цикл.

Каждый круговой квазистатический процесс на $P - V$-диаграмме (а также на любой другой диаграмме состояния) представляется замкнутой кривой.

Термодинамическая система, совершающая круговой процесс и обменивающаяся энергией с внешними телами, называется рабочим телом. Обычно таким телом является газ.

Прямым циклом называется цикл кругового процесса, в котором система совершает положительную работу

$$A = \oint P\,dV > 0.$$

Такому циклу соответствует движение по замкнутой кривой на $P - V$-диаграмме по часовой стрелке.

Примером прямого цикла является цикл, совершаемый рабочим телом в тепловом двигателе. В таком двигателе рабочее тело получает энергию в форме теплоты от внешних источников и часть ее отдает в форме работы.

Обратным циклом называется цикл кругового процесса, в котором система совершает отрицательную работу

$$A = \oint P\,dV < 0.$$

Такому циклу соответствует движение по замкнутой кривой на $P - V$-диаграмме против часовой стрелки.

Примером обратного цикла является цикл, совершаемый рабочим телом в холодильной установке. В такой установке рабочее тело получает энергию в форме работы и передает энергию в форме теплоты от одного (охлаждаемого) тела к другому (нагреваемому) телу, причем температура охлаждаемого тела ниже температуры нагреваемого тела.

Рассмотрим тепловую машину, в которой совершается прямой цикл. Пусть при этом температура системы меняется в пределах $T_{min} \leq T \leq T_{max}$.

Введем также следующие характеристики данного цикла: $A = \int P\,dV$ – работа расширения тела, совершаемая за один цикл; Q_{obt} – тепло, получаемое рабочим телом; Q_{giv} – отдаваемое им тепло.

Коэффициет полезного действия (к.п.д.) тепловой машины определяется следующим образом: $\eta = A/Q_{obt}$. За один цикл энергия рабочего тела E не меняется. Следовательно, работа A равна количеству теплоты, полученному рабочим телом за цикл: $A = Q_{obt} - Q_{giv}$.

Таким образом,

$$\eta = A/Q_{obt} = 1 - Q_{giv}/Q_{obt}.$$

Данная величина всегда удовлетворяет неравенству $\eta \leq \eta_{max}$, где

$$\eta_{max} = 1 - T_{min}/T_{max}.$$

Выведем данное неравенство.

Пусть кривая L на диаграмме процесса состоит из $m + n$ частей (участков), которые мы обозначим через L'_1, ..., L'_m, L''_1, ..., L''_n, причем на каждом участке L'_j $(j = 1, ..., m)$ количество теплоты Q'_j, получаемое рабочим телом, неотрицательно $(Q'_j \geq 0)$, а на каждом участке L''_k $(k = 1, ..., n)$ количество теплоты Q''_k, получаемое рабочим телом, неположительно $(Q''_k \leq 0)$. Тогда

$$Q_{obt} = \sum_{j=1}^{m} Q'_j; \qquad Q_{giv} = -\sum_{k=1}^{n} Q''_k.$$

Отдельные слагаемые в данных суммах и сами суммы могут быть оценены следующим образом:

На каждом участке L'_j приращение энтропии рабочего тела $\Delta S'_j \geq 0$, следовательно,

$$Q'_j = \int T\,dS \leq T_{max} \cdot \Delta S'_j$$

и

$$Q_{obt} \leq T_{max} \sum_{j=1}^{m} \Delta S'_j.$$

На каждом участке L''_k приращение энтропии рабочего тела $\Delta S''_k \leq 0$, следовательно,

$$-Q''_k = -\int T\,dS \geq T_{min} \cdot (-\Delta S''_k)$$

и

$$Q_{giv} \geq T_{min} \sum_{k=1}^{n} (-\Delta S''_k).$$

За один цикл энтропия рабочего тела S не меняется. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta S'_j + \sum_{k=1}^{n} \Delta S''_k = 0.$$

Обозначив первую сумму в левой части данного равенства через u, получим следующие оценки величин, от которых зависит η:

$$Q_{obt} \le u\,T_{max}; \qquad Q_{giv} \ge u\,T_{min},$$

откуда уже легко выводится требуемое неравенство для η.

В цикле Карно минимальная температура рабочего тела T_1 – это температура холодильника, а максимальная его температура T_2 – это температура нагревателя.

Данный цикл состоит из следующих четырех этапов:

1) Рабочее тело, имеющее объем V_1 при температуре T_1, находится в контакте с нагревателем и изотермически расширяется до некоторого объема V_{12} ($V_1 < V_{12} < V_2$). При этом рабочее тело получает от нагревателя количество теплоты Q_2 ($Q_2 > 0$).

2) Рабочее тело, имеющее объем V_{12} при температуре T_2, теплоизолировано и адиабатически расширяется до тех пор, пока его температура не станет равной T_1. При этом объем тела становится равным V_2.

3) Рабочее тело, имеющее объем V_2 при температуре T_1, находится в контакте с холодильником и изотермически сжимается до объема V_{21}. При этом рабочее тело получает от холодильника количество теплоты Q_1 ($Q_1 < 0$), т.е. передает холодильнику количество теплоты $|Q_1|$

4) Рабочее тело, имеющее объем V_{21} при температуре T_1, теплоизолировано и адиабатически сжимается до тех пор, пока его температура не станет равной T_2. При этом объем тела становится равным V_1.

К.п.д. цикла Карно η равен максимальному к.п.д. тепловой машины, температура рабочего тела которого меняется в интервале $[T_1, T_2]$:

$$\eta = (T_2 - T_1)/T_2.$$

6.8 Момент импульса частицы. Закон изменения момента импульса. Момент силы.

Ответы.

Момент силы, действующей на частицу A, и момент импульса данной частицы относительно точки C определяются формулами

$$\vec{N} = (\vec{r}_A - \vec{r}_C) \times \vec{F}; \qquad \vec{M} = (\vec{r}_A - \vec{r}_C) \times \vec{p},$$

где F – сила, действующая на частицу A; $\vec{p}$ – испульс частицы A; $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_C$ – радиус-векторы частицы A и точки C.

Если точка C находится в начале координат, то

$$\vec{N} = \vec{r}_A \times \vec{F}; \qquad \vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{p}.$$

Если точка C неподвижна, то из основного уравнения динамики материальной точки (второго закона Ньютона), представленного в виде

$$d\vec{p}/dt = \vec{F},$$

следует закон изменения момента импульса:

$$d\vec{M}/dt = \vec{N}.$$

Если не указывается точка, относительно которой следует рассматривать момент силы и момент импульса, то имеется в виду начало координат.

Момент испульса системы частиц определяется как сумма моментов импульсов всех частиц данной системы. Если силы взаимодействия частиц данной системы являются потенциальными, и если вся система находится во внешнем потенциальном поле, центрально-симметричном относительно начала координат, то момент импульса такой системы является интегралом движения.

В частности это выполняется для любой замкнутой системы.